CLASSES TPC

OBJECTIFS DE FORMATION ET PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES

I OBJECTIFS DE FORMATION

1) Objectifs généraux de la formation

Dans la filière Technologie, Physique et Chimie, les mathématiques constituent conjointement une discipline scientifique à part entière, développant des concepts, des résultats, des méthodes et une démarche spécifiques, et une discipline fournissant des connaissances et des méthodes nécessaires à la physique, à la chimie et à l'informatique.

La réflexion sur les concepts et les méthodes, la pratique du raisonnement, constituent un objectif majeur. Les étudiants doivent connaˆitre les définitions et les énoncés des théorèmes figurant au programme, savoir analyser la portée des hypothèses et des résultats, et savoir mobiliser leurs connaissances pour l'étude de problèmes. Aucune démonstration n'est exigible des étudiants ; celles qui sont utiles à la compréhension du cours peuvent être effectuées par le professeur. En revanche, certains résultats puissants utiles aux sciences de l'ingénieur sont admis.

a) *Objectifs de la formation*

La formation est conçue en fonction de deux objectifs essentiels.
- Développer conjointement l'intuition, l'imagination, le raisonnement et la rigueur.
- Promouvoir la réflexion personnelle des étudiants sur les problèmes et les phénomènes mathématiques, sur la portée des concepts et des méthodes, au moyen d'exemples et de contre-exemples.

b) *Unité de la formation scientifique*

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme d'une même discipline, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. Plus largement, l'enseignement d'une discipline scientifique est à relier à celui des autres disciplines sous deux aspects principaux : organisation concertée des activités d'enseignement d'une même classe ; étude de questions mettant en œuvre des interactions entre les champs de connaissances (mathématiques, physique, chimie, informatique...).
La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, y contribue de façon efficace.

Il importe aussi que le contenu culturel des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, les textes et les références historiques permettent d'analyser l'interaction entre les problèmes mathématiques et la construction des concepts, mettent en évidence le rôle central joué par le questionnement scientifique pour le développement théorique et montrent en outre que les sciences, et les mathématiques en particulier, sont en perpétuelle évolution et que le dogmatisme n'est pas la référence en la matière.

2) Architecture et contenus des programmes

a) *Intentions majeures*

Les contenus sont organisés autour de quatre intentions majeures.

- Organiser les programmes autour de quelques notions essentielles, en dégageant les idées majeures et leur portée, en fournissant des outils puissants et efficaces, en évitant toute technicité gratuite, et en écartant les notions qui ne pourraient être traitées que de façon superficielle.

- Donner un rôle très important aux travaux pratiques, dont la fonction est double : indiquer le champ des problèmes et phénomènes mathématiques à étudier en relation avec les concepts figurant au programme ; préciser les méthodes et les techniques usuelles exigibles des étudiants. En revanche, les travaux pratiques ne doivent pas conduire à des dépassements de programme prenant la forme d'une anthologie d'exemples dont la connaissance serait exigible des étudiants.

- Mettre en valeur le caractère plurivalent des concepts mathématiques. Cette plurivalence s'inscrit dans un double mouvement : d'une part, l'étude d'un domaine particulier vient enrichir le concept général, grâce au langage et aux méthodes propres à ce domaine ; d'autre part, le concept général permet le transfert des connaissances d'un domaine d'application à un autre.

- Réaliser un équilibre global entre l'algèbre, l'analyse et la géométrie. Il va de soi, d'ailleurs, que cette séparation traditionnelle n'est qu'une commodité de rédaction et ne doit pas faire oublier les interactions nombreuses et étroites entre ces trois grands domaines des mathématiques. Dans cette intention, les programmes sont présentés selon deux grandes parties : analyse et géométrie différentielle, algèbre et géométrie.

C'est en fonction des objectifs précédents que les programmes sont conçus et que l'horaire hebdomadaire doit être géré. Dans les classes TPC, il est de 10 heures (7 heures de cours et 3 heures de travaux dirigés). Pour valoriser les concepts essentiels et les principales méthodes (comprenant les exemples et contre-exemples qui illustrent leur portée et leurs conditions de validité), il convient de consacrer à leur étude environ 5 heures de cours. Les 5 heures restantes (2 heures de cours et 3 heures de travaux dirigés) sont à consacrer à l'étude de problèmes mathématiques, notamment ceux qui sont indiqués dans les rubriques de travaux pratiques ; à cet égard, toute technicité gratuite est à éviter.

b) *Secteur de l'analyse et de ses interventions*

Dans ce secteur, le programme est organisé autour des concepts fondamentaux de fonction, qui permet de modéliser le comportement des phénomènes continus, et de suite (ou de série), qui permet de modéliser le comportement des phénomènes discrets.
Le programme d'analyse combine l'étude des problèmes qualitatifs avec celle des problèmes quantitatifs ; il développe conjointement l'étude du comportement global des suites et des fonctions avec celle de leur comportement local ou asymptotique.
En première année, la maˆitrise du calcul différentiel et intégral à une variable constitue un objectif essentiel.
En seconde année, la représentation des fonctions, notamment par des séries (séries entières, séries de Fourier) et par des intégrales dépendant d'un paramètre, l'étude des équations différentielles linéaires tiennent une place majeure. Le programme comporte en outre quelques notions sur les fonctions de plusieurs variables, en relation avec l'enseignement des sciences physiques.

c) *Secteur de l'algèbre et de ses interventions*

Dans ce secteur, le programme est organisé autour des concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire (points de vue géométrique et matriciel). Il met en œuvre les méthodes de l'algèbre linéaire pour la résolution de problèmes issus, non seulement des autres secteurs de l'algèbre, mais aussi de l'analyse et de la géométrie.
En première année, le programme combine l'algèbre linéaire (espaces vectoriels, applications linéaires, algèbres, dimension, rang, calcul matriciel) et ses interventions en algèbre, en analyse et en géométrie.
En seconde année, le programme développe de nouveaux concepts (déterminants, valeurs propres et sous-espaces propres, réduction des endomorphismes d'un espace vectoriel et des endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien, réduction des matrices).

d) *Secteur de la géométrie et de ses interventions*

Une vision géométrique des problèmes imprégne l'ensemble du programme de mathématiques car les méthodes de la géométrie et les apports de son langage (figures, représentations graphiques, interprétations géométriques. . .) jouent un rôle capital en algèbre, en analyse et dans leurs domaines d'intervention.

e) *Articulation avec la physique et la chimie*

En relation étroite avec les concepts propres à la physique et à la chimie, le programme valorise les interprétations cinématiques et dynamiques des concepts de l'analyse et de la géométrie, ainsi que leurs interprétations en termes de signaux continus ou discrets. Ces interprétations, conjointement avec les interprétations graphiques et géométriques, viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse.

f) *Rôle de la pensée algorithmique*

En relation avec le programme d'informatique, l'ensemble du programme de mathématiques valorise la démarche algorithmique ; il intégre la mise en forme d'algorithmes et, sur des exemples, la comparaison de leurs performances.
Les algorithmes associés aux notions étudiées dans le programme de mathématiques sont mentionnés dans le texte même du programme ou dans les travaux pratiques. En outre, de nombreux travaux pratiques donnent lieu à l'exploitation du logiciel de calcul symbolique et formel étudié en informatique.

g) *Emploi des calculatrices*

Cet emploi est défini par la réglementation en vigueur. Les étudiants doivent savoir utiliser une calculatrice programmable dans les situations liées au programme de la classe et de la discipline considérées. Cet emploi combine les capacités suivantes, qui constituent un savoir–faire de base et sont seules exigibles :
- savoir effectuer des opérations arithmétiques sur les nombres réels et savoir comparer deux nombres réels ;

- savoir utiliser les touches des fonctions qui figurent au programme de la classe considérée et savoir programmer le calcul des valeurs d'une fonction d'une ou plusieurs variables permis par ces touches ;
- savoir programmer une instruction séquentielle, une instruction conditionnelle et une instruction itérative comportant éventuellement un test d'arrêt.

3) Conception et organisation de la formation

a) *Organisation du travail de la classe*

On ne saurait se borner à l'exposé, si parfait soit-il, de théories éventuellement suivies d'applications ; il convient au contraire de centrer l'enseignement autour de l'étude de phénomènes et de problèmes mathématiques. Deux objectifs essentiels sont à poursuivre :
- Promouvoir l'acquisition de méthodes ; la classe est un lieu de découverte, d'exploitation de problématiques, un lieu de réflexion et de débats sur les démarches suivies, d'analyse des hypothèses d'un théorème et de la portée des concepts mis en jeu et des résultats obtenus. Elle est aussi un lieu d'élaboration de synthèses ayant pour triple objectif de dégager clairement les idées et méthodes essentielles, de préciser leur portée pour la résolution de problèmes et, inversement, d'analyser les principales méthodes dont on dispose pour étudier un type donné de problème. Dans cette perspective, les enseignements combinent de façon organique la formulation et l'analyse de problèmes, l'élaboration de concepts, la présentation, la démonstration et la mise en œuvre de résultats, ainsi que la mise en valeur de méthodes.
- Développer les capacités de communication. La pertinence des indications écrites et orales données par le professeur et la qualité de structuration des échanges interpersonnels jouent ici un rôle essentiel : qualités d'écoute et d'expression orale (formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée. . .), qualités de lecture et d'expression écrite (maˆitrise du tableau, prise de notes, analyse d'un énoncé, mise au point de la rédaction d'un énoncé ou d'un raisonnement. . .). La communication utilise des moyens diversifiés : non seulement le tableau, dont la maˆitrise est un élément important, mais aussi le rétroprojecteur, l'ordinateur connecté à un dispositif de projection approprié.

b) *Organisation du travail personnel des étudiants*

Les travaux effectués en dehors du temps d'enseignement, à la maison ou au lycée, ont une importance capitale ; leurs fonctions sont diversifiées :
- L'étude du cours joue un rôle central. Son objectif est double ; connaˆitre les concepts et résultats essentiels, maˆitriser les méthodes d'étude des problèmes. L'étude du cours est donc indissociable de celle des problèmes.
- La résolution d'exercices d'entraˆinement, combinée avec l'étude du cours, a pour fonction d'affermir les connaissances de base des étudiants et d'évaluer leur capacité à les mettre en œuvre sur des exemples simples. La résolution de tels exercices n'est donc pas un objectif en soi, et tout excès de technicité doit être évité.
- L'étude de questions plus complexes, sous forme de préparation d'activités en classe ou de problèmes à résoudre et à rédiger, alimente le travail de recherche, individuel ou en équipe, et permet aux étudiants d'évaluer leur capacité à mobiliser leurs connaissances de façon coordonnée.
- Les travaux individuels de rédaction en temps libre (solution d'un problème, mise au point d'exercices étudiés en classe. . .) visent essentiellement à développer les capacités d'expression écrite et de mise au point d'un raisonnement. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements, constituent des objectifs très importants. Ces travaux de rédaction doivent donc être fréquents.
- Les épreuves écrites en temps limité ont pour objectif principal de préparer les étudiants aux épreuves écrites des concours. Les connaissances exigibles dans ces épreuves ne doivent en aucun cas dépasser celles qui figurent au programme. Quand il s'agit d'épreuves de concours de longueur importante, le barême doit en tenir compte, afin de ne pas décourager les étudiants.

c) *Évaluation et notation des étudiants*

La communication des objectifs à atteindre et la mise en œuvre de formes diversifiées d'évaluation peuvent aider de manière efficace les étudiants à progresser, à se situer et à affiner un choix d'orientation.
La pertinence du calibrage de la notation constitue un objectif important. Il convient d'éviter tant la surnotation, génératrice d'illusion, que la sousnotation, génératrice de découragement.

d) *Interprétation et délimitation des programmes*

Pour chacune des classes, les connaissances et les capacités exigibles des étudiants sont indiquées avec précision. Il importe de souligner la nécessité impérieuse de respecter les limites du programme, tant au niveau de l'enseignement qu'à celui des épreuves d'évaluation. Un encyclopédisme relayé par la pratique du bachotage irait totalement à l'encontre du but recherché, qui tend à privilégier une formation de l'esprit scientifique fondée sur l'approfondissement d'un noyau limité de connaissances fondamentales. Il importe que cet état d'esprit trouve sa traduction dans les sujets des épreuves d'évaluation.

II PROGRAMME DE LA CLASSE TPC SECONDE ANNÉE

AVERTISSEMENT

1) Organisation du texte des programmes

Ce texte est organisé en deux titres : analyse et géométrie différentielle, algèbre et géométrie. Chacun de ces titres comporte des parties (numérotées I, II, ...), elles–mêmes subdivisées en chapitres (numérotés 1, 2, ...), puis en paragraphes (repérés a, b, ...). Chacune des parties comporte :
- En tête de partie ou de chapitre, un bandeau définissant les objectifs essentiels et délimitant le cadre général d'étude des notions relatives à cette partie ou à ce chapitre.
- Pour chaque paragraphe, un texte présenté en deux colonnes ; à gauche sont fixées les connaissances et les méthodes figurant au programme, à droite un commentaire indique les exemples fondamentaux à connaˆitre et les méthodes à maˆitriser, précise le sens ou les limites à donner à certaines questions, et repère le cas échéant l'interaction du sujet étudié avec d'autres parties du programme.
- En fin de partie, des travaux pratiques, qui sont de deux sortes : les uns, dont l'énoncé commence par la locution "Exemples de ...", indiquent le champ des questions mathématiques à étudier, soit dans le cadre du temps d'enseignement, soit dans celui du travail personnel des étudiants ; les autres fixent les méthodes et les techniques que les étudiants doivent connaˆitre et savoir mettre en œuvre. Les travaux pratiques sont également présentés en deux colonnes ; à gauche figurent leurs énoncés, à droite un commentaire indique des repères pour le niveau d'approfondissement à donner à leur étude. Enfin, les travaux pratiques qui doivent donner lieu à l'emploi du logiciel de calcul symbolique et formel étudié en informatique sont repérés par le signe §.

2) Connaissances et capacités exigibles des étudiants

Le programme de mathématiques de la filière Technologie, Physique et Chimie comporte conjointement celui de la classe de seconde année TPC2, fixé par le présent texte, et celui de la classe de première année TPC1, fixé par l'arrêté du 3 Juillet 1995, publié au B.O.E.N. hors série du 20 Juillet 1995, volume 4.

Parmi les connaissances (définitions, notations, énoncés, exemples, contre- exemples, méthodes, algorithmes...) et les capacités de mise en œuvre de ces connaissances, le texte du programme délimite de manière précise trois catégories.

a) *Celles qui sont exigibles des étudiants :* il s'agit de l'ensemble des points figurant dans la colonne de gauche des différents paragraphes, des points qui sont repérés comme tels dans la colonne de droite ou dans les bandeaux, et des travaux pratiques non repérés par la mention "Exemples de ...".
Enfin, aucun développement ne doit être donné aux notions figurant au programme lorsqu'elles sont uniquement repérées par la locution "définition de ..." ; seule cette définition est alors exigible des étudiants.

b) *Celles qui relèvent d'activités possibles ou souhaitables, mais qui ne sont pas exigibles des étudiants :* il s'agit de tous les travaux pratiques dont l'énoncé commence par la locution "Exemples de ..." et des points repérés dans les bandeaux ou dans la colonne de droite par la locution "aucune connaissance spécifique sur ... n'est exigible des étudiants". Lorsqu'une épreuve d'évaluation fait intervenir de telles connaissances ou de telles capacités, toutes les indications utiles doivent être fournies aux étudiants.
En outre, pour l'ensemble du programme, aucune démonstration des résultats du cours n'est exigible des étudiants. Le professeur peut, suivant les cas, démontrer en détail un résultat, indiquer l'idée de sa démonstration ou l'admettre.

c) *Celles qui sont indiquées comme étant "hors programme"* dans les bandeaux ou dans la colonne de droite. Elles ne doivent pas être traitées et ne peuvent faire l'objet d'aucune épreuve d'évaluation.
En particulier, la locution "la démonstration est hors programme" signifie qu'il est demandé d'admettre le résultat ; aucune épreuve d'évaluation ne peut comporter une telle démonstration.
Enfin, lorsqu'une question est repérée dans les bandeaux par la locution "En vue de l'enseignement des autres disciplines scientifiques, il convient ... mais, en mathématiques, aucune connaissance sur ce point n'est exigible des étudiants", aucune épreuve d'évaluation en mathématiques ne peut porter sur cette question.

ALGÈBRE LINÉAIRE ET GÉOMÉTRIE

Le programme est organisé autour des concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire : espaces vectoriels, applications linéaires, sous-espaces vectoriels supplémentaires, sommes directes, projecteurs, valeurs propres et sous-espaces propres d'un endomorphisme ; bases, dimension et rang. Le programme met en œuvre les méthodes de l'algèbre linéaire pour la résolution de problèmes issus, non seulement des autres secteurs de l'algèbre, mais aussi de l'analyse et de la géométrie.

La ma ̂itrise de l'algèbre linéaire en dimension finie et, notamment, de l'articulation entre le point de vue géométrique (vecteurs et points) et le point de vue matriciel constitue un objectif essentiel. Le programme combine, de façon indissociable, l'étude des concepts de l'algèbre linéaire avec celle des problèmes linéaires (indépendance linéaire, équations linéaires, réduction des endomorphismes et des matrices. . .).

Le programme d'algèbre et géométrie comporte l'analyse et l'emploi d'algorithmes numériques issus de l'algèbre linéaire ainsi que l'emploi du logiciel de calcul symbolique et formel.

I. ALGÈBRE LINÉAIRE

L'objectif est triple.
- Consolider les acquis de la classe de première année : étude des concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire (espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, applications linéaires, sous-espaces vectoriels supplémentaires et projecteurs, algèbres) ; notions de base sur les espaces vectoriels de dimension finie (bases, dimension, rang, calcul matriciel).
- Étudier de nouveaux concepts : somme directe de sous-espaces vectoriels, trace et déterminant d'un endomorphisme.
- Ma ̂itriser les relations entre le point de vue géométrique (vecteurs et applications linéaires) et le point de vue matriciel.
Il convient d'illustrer les notions et les résultats de l'algèbre linéaire par de nombreuses figures.

Dans cette partie, le corps de base $\mathbf{K}$ *est* $\mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$ *et les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie.*

1- Espaces vectoriels ; applications linéaires

a) Somme directe de sous-espaces vectoriels

Somme directe de sous-espaces vectoriels : définition de la somme $\sum E_i$ d'une famille finie $(E_i)_{i\in I}$ de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E ; définition d'une somme directe $\oplus E_i$ d'une telle famille. Cas des sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Dans l'espace vectoriel $\mathbf{K}[X]$, le sous-espace vectoriel $\mathbf{K}[X]\,P$ constitué des multiples d'un polynôme P de degré $n+1$ admet pour sous espace supplémentaire le sous-espace vectoriel $\mathbf{K}_n[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Lorsque E est de dimension finie et que la somme $\sum E_i$ est directe,

$$\dim \underset{i}{\oplus} E_i = \sum_i \dim E_i.$$

Alors, pour que $E = \oplus E_i$, il faut et il suffit que

$$\dim E = \sum_i \dim E_i.$$

Définition d'une base d'un espace vectoriel E de dimension finie adaptée à un sous-espace vectoriel de E, à une décomposition $E = \oplus E_i$.

b) Image et noyau d'une application linéaire

Une application linéaire u de E dans F définit un isomorphisme de tout supplémentaire E' de $\operatorname{Ker} u$ sur $\operatorname{Im} u$.

Application à l'interpolation de Lagrange : détermination des polynômes P prenant des valeurs données sur une famille $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ d'éléments de $\mathbf{K}$ distincts deux à deux.

Soit u l'application de $\mathbf{K}[X]$ dans $\mathbf{K}^{n+1}$ définie par $u(P) = \big(P(a_0), P(a_1), \ldots, P(a_n)\big)$. Le noyau de u est constitué des multiples du polynôme $N = \prod (X - a_j)$; en outre, u définit un isomorphisme de $\mathbf{K}_n[X]$ sur $\mathbf{K}^{n+1}$.

Relation

$$\dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Ker} u = \dim E.$$

Caractérisation des isomorphismes à l'aide du rang. Invariance du rang par composition avec un isomorphisme.

c) Trace d'un endomorphisme

Trace d'une matrice carrée ; linéarité de la trace, relations $\mathrm{Tr}\,AB = \mathrm{Tr}\,BA$, $\mathrm{Tr}\,PMP^{-1} = \mathrm{Tr}\,M$. Trace d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Le rang d'un projecteur est égal à sa trace.

2- Déterminants

L'objectif de ce chapitre est de consolider les acquis de la classe de première année sur les déterminants en dimension 2 ou 3, et d'étendre la notion de déterminant au cas d'un espace vectoriel de dimension n. Pour tout calcul de déterminant d'ordre supérieur ou égal à 4, des indications doivent être fournies sur la méthode à suivre.
Le groupe symétrique et la signature d'une permutation sont hors programme.

a) Déterminant de n vecteurs

Formes n-linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension n. Déterminant de n vecteurs dans une base d'un espace vectoriel de dimension n. Caractérisation des bases.

La démonstration de l'existence du déterminant est hors programme.
Application à l'expression de la solution d'un système de Cramer.

b) Déterminant d'un endomorphisme

Déterminant d'un endomorphisme, du composé de deux endomorphismes ; caractérisation des automorphismes.

Application à l'orientation d'un espace vectoriel réel de dimension 2 ou 3.

c) Déterminant d'une matrice carrée

Déterminant d'une matrice carrée. Déterminant du produit de deux matrices, de la transposée d'une matrice. Développement par rapport à une ligne ou une colonne ; cofacteurs.

La preuve de la relation $\mathrm{Det}\,{}^tM = \mathrm{Det}\,M$ est hors programme.

Travaux pratiques

Exemples d'étude de l'indépendance linéaire d'une famille de vecteurs. Exemples de construction de bases et de sous-espaces vectoriels supplémentaires, et d'emploi de bases, de supplémentaires, de sommes directes et de changements de bases, notamment pour l'étude des équations linéaires.
§ Exemples d'étude de problèmes d'interpolation linéaire.

§ Exemples d'étude de systèmes d'équations linéaires.

§ Emploi des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice à coefficients numériques pour la résolution des systèmes de Cramer par l'algorithme du pivot partiel, le calcul de déterminants, l'inversion des matrices.

Il convient d'exploiter les espaces vectoriels d'endomorphismes, de matrices, de polynômes, de suites et de fonctions.

II. RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

L'objectif ce cette partie est triple :
- Étudier les valeurs propres et les sous-espaces propres d'un endomorphisme.
- Étudier les endomorphismes diagonalisables.
- Exploiter les résultats obtenus pour l'étude de problèmes issus de l'algèbre, de l'analyse et de la géométrie.

En outre, le programme associe étroitement le point de vue géométrique et le point de vue matriciel, et valorise les applications de la réduction à l'algèbre et à l'analyse.

Dans cette partie, le corps de base $\mathbf{K}$ *est* $\mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$. *et les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie.*

a) Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme

Définition d'un sous-espace vectoriel F stable par un endomorphisme u d'un espace vectoriel E.

Droites stables par un endomorphisme u de E. Définition des valeurs propres, des vecteurs propres (le vecteur 0 n'est pas un vecteur propre), des sous-espaces propres $E_\lambda(u) = \operatorname{Ker}\left(u - \lambda \mathrm{I}_E\right)$ d'un endomorphisme u de E.

Pour que λ soit une valeur propre de u, il faut et il suffit que $u - \lambda \mathrm{I}_E$ ne soit pas inversible ; l'ensemble des valeurs propres de u est alors appelé spectre de u et noté Sp (u).

Éléments propres des homothéties, des projecteurs, des symétries.

Toute famille de p vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux est libre.

La somme de n sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux est directe.

b) Valeurs propres, vecteurs propres d'une matrice carrée

Définition des valeurs propres, des sous-espaces propres, des vecteurs propres et du spectre d'un élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Un élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ peut être considéré comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$; le spectre de M dans $\mathbf{R}$ est contenu dans le spectre de M dans $\mathbf{C}$.

Les éléments propres de M sont définis comme étant ceux de l'endomorphisme u de $\mathbf{K}^n$ canoniquement associé à M.

Dans l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, propriétés de l'endomorphisme $M \mapsto PMP^{-1}$. Définition des matrices semblables ; interprétation géométrique.

Spectre de deux matrices semblables.

c) Polynôme caractéristique

Polynôme caractéristique d'une matrice, d'un endomorphisme ; ordre de multiplicité d'une valeur propre.
Lorsque ce polynôme est scindé, expression de la trace et du déterminant en fonction des valeurs propres.

d) Réduction d'un endomorphisme en dimension finie

Définition d'un endomorphisme u diagonalisable : l'espace vectoriel E est somme (directe) des sous-espaces propres de $E_\lambda(u)$. Inversement, si E est somme directe de sous-espaces vectoriels stables E_j sur lesquels u induit une homothétie, alors u est diagonalisable.

Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement s'il existe une base formée de vecteurs propres de u, ou encore s'il existe une base dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Pour qu'un endomorphisme u de E soit diagonalisable, il faut et il suffit que la somme des dimensions des sous-espaces propres de u soit égale à dim E.

Tout endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé et a toutes ses racines simples est diagonalisable, et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

Définition d'une matrice carrée M diagonalisable. Pour que M soit diagonalisable, il faut et il suffit que M soit semblable à une matrice diagonale.

Lorsque M est diagonalisable, M s'écrit sous la forme PDP^{-1}, où D est diagonale et où P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbf{K}^n$ à une base de vecteurs propres de M.

Travaux pratiques

§ Exemples d'étude de suites numériques satisfaisant à une relation de récurrence linéaire à coefficients constants.

Les étudiants doivent savoir déterminer les suites satisfaisant à une relation de récurrence $u_{n+2} = a\, u_{n+1} + b\, u_n$.

§ Exemples de réduction à la forme diagonale de matrices carrées sur $\mathbf{C}$ ou sur $\mathbf{R}$.
§ Exemples d'étude du comportement des puissances d'une matrice diagonalisable.

Il convient de donner quelques exemples de matrices non diagonalisables, mais aucune méthode générale de réduction à la forme triangulaire n'est exigible des étudiants.

III. ESPACES EUCLIDIENS, GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

Cete partie est organisée autour de quatre objectifs :
- Consolider les acquis de la classe de première année sur le produit scalaire, les espaces vectoriels euclidiens de dimension 2 ou 3 et la géométrie euclidienne du plan et de l'espace.
- Étendre ces notions au cas des espaces euclidiens de dimension n ; étudier la réduction des endomorphismes autoadjoints dans une base orthonormale.
- Maˆıtriser les relations entre le point de vue géométrique (vecteurs, endomorphismes autoadjoints, automorphismes orthogonaux) et le point de vue matriciel.
- Exploiter les résultats obtenus pour l'étude de problèmes issus de l'algèbre et de l'analyse.

Il convient d'illustrer les notions et les résultats sur les espaces vectoriels euclidiens par de nombreuses figures.

1- Espaces préhilbertiens réels ou complexes

L'objectif de ce chapitre est double :
- Consolider les notions de base abordées en classe de première année concernant le produit scalaire, la norme associée et l'orthogonalité ; introduire le concept de somme directe orthogonale.
- Étendre brièvement ces notions au cas du corps des complexes.

a) Produit scalaire

Produit scalaire sur un $\mathbf{R}$-espace vectoriel ; définition d'un espace préhilbertien réel. Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire ; norme et distance associées.
Relation entre produit scalaire et norme, polarisation.

L'étude de ces notions doit être illustrée par de nombreux exemples, notamment le produit scalaire canonique de $\mathbf{R}^n$ et les produits scalaires usuels sur les espaces de fonctions.

Produit scalaire $(x, y) \mapsto (x|y)$ sur un $\mathbf{C}$-espace vectoriel (linéaire à droite, semi-linéaire à gauche) ; définition d'un espace vectoriel préhilbertien complexe. Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire ; norme et distance associées. Relation

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(x|y).$$

L'étude de ces notions doit être illustrée par de nombreux exemples, et notamment :
- le produit scalaire canonique de $\mathbf{C}^n$;
- $(f, g) \mapsto (f|g) = \int_{[a,b]} \bar{f}g$ dans $\mathcal{C}([a, b])$;
- $(f, g) \mapsto (f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} \bar{f}g$ dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}_{2\pi}$ des fonctions continues 2π-périodiques sur $\mathbf{R}$ à valeurs complexes.

b) Orthogonalité

Vecteurs unitaires. Vecteurs orthogonaux, sous-espaces vectoriels orthogonaux, orthogonal F° (ou $F^\perp$) d'un sous-espace vectoriel F de E.

Familles orthogonales, familles orthonormales ; relation de Pythagore pour une famille orthogonale finie.

Sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux. Somme directe orthogonale d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.

Projecteurs orthogonaux.

Extension des notions précédentes aux espaces préhilbertiens complexes.

2- Espaces euclidiens

Ce chapitre est organisé autour de quatre objectifs :
- Consolider les acquis de première année sur les espaces vectoriels euclidiens de dimension 2 ou 3 (bases orthonormales, automorphismes orthogonaux, matrices orthogonales) et la géométrie euclidienne du plan et de l'espace (distances, angles, déplacements).
- Étendre au cas des espaces vectoriels euclidiens les notions de base orthonormale, de projection orthogonale, d'automorphisme orthogonal et de matrice orthogonale.
- Étudier de nouveaux concepts : endomorphismes autoadjoints, réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles.
- Étendre les notions de base orthonormale et de projection orthogonale au cas des espaces préhilbertiens complexes de dimension finie.

a) Bases orthonormales

Définition d'un espace vectoriel euclidien : espace préhilbertien réel de dimension finie.

Existence de bases orthonormales, complétion d'une famille orthonormale en une base orthonormale.
Toute forme linéaire f sur un espace vectoriel euclidien E s'écrit de manière unique sous la forme $f(x) = (a|x)$ où a est un vecteur de E.

Expressions dans une base orthonormale des coordonnées et de la norme d'un vecteur, du produit scalaire de deux vecteurs, de la distance de deux points.

Extension des notions précédentes au cas d'un espace vectoriel hermitien, c'est-à-dire d'un espace préhilbertien complexe de dimension finie.

b) Projections orthogonales

Dans un espace préhilbertien réel E (de dimension finie ou non), l'orthogonal F° d'un sous-espace vectoriel F de dimension finie est un supplémentaire de ce sous-espace vectoriel, appelé supplémentaire orthogonal de F ; définition de la projection orthogonale $p_F(x)$ d'un vecteur x de E sur F. Lorsque E est de dimension finie,

$$\dim F^\circ + \dim F = \dim E \quad \text{et} \quad F^{\circ\circ} = F.$$

Expression de $p_F(x)$ lorsque F est muni d'une base orthonormale $(e_1, e_2, \dots, e_n)$:

$$p_F(x) = \sum_{j=1}^{n} (e_j|x)\, e_j.$$

Définition de la distance $d(x, F)$ d'un élément x de E à F. Expression de cette distance à l'aide de $p_F(x)$: la fonction qui, à tout élément z de F associe $\|x - z\|$ atteint son minimum en un point et un seul, à savoir $p_F(x)$; relation

$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + d(x, F)^2.$$

Inégalité de Bessel :

$$\sum_{j=1}^{n} |(e_j|x)|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

Extension des notions précédentes au cas des espaces préhilbertiens complexes.

c) Endomorphismes autoadjoints, automorphismes orthogonaux

Dans ce paragraphe, les espaces vectoriels considérés sont des espaces euclidiens.

Définition d'un endomorphisme autoadjoint (ou symétrique) u par la relation $\big(u(x)|y\big) = \big(x|u(y)\big)$.

Les endomorphismes autoadjoints constituent un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Définition d'un automorphisme orthogonal d'un espace vectoriel euclidien E (c'est-à-dire un automorphisme de E conservant le produit scalaire). Caractérisation à l'aide de la conservation de la norme.

Caractérisation d'un automorphisme orthogonal par l'image d'une (de toute) base orthonormale.

Définition du groupe orthogonal $O(E)$; symétries orthogonales, réflexions.

L'étude générale du groupe orthogonal est hors programme.

Définition des matrices orthogonales et du groupe orthogonal $O(n)$.
Caractérisation des matrices orthogonales par leurs vecteurs colonnes.

Les matrices orthogonales sont définies à partir de l'automorphisme de $\mathbf{R}^n$ associé. Caractérisation des matrices orthogonales par l'une des relations

$${}^tM\,M = I_n \quad \text{ou} \quad M\,{}^tM = I_n.$$

Caractérisation d'un endomorphisme autoadjoint, d'un automorphisme orthogonal, à l'aide de la matrice associée dans une (toute) base orthonormale. Changement de base orthonormale.

Déterminant d'une matrice orthogonale, d'un automorphisme orthogonal ; déterminant d'une réflexion.

La notion de rotation ne figure au programme qu'en dimensions 2 et 3.

d) Réduction des endomorphismes autoadjoints

Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E. Alors E est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u ; en particulier, u est diagonalisable dans une base orthonormale.

Diagonalisation d'une matrice symétrique au moyen d'une matrice orthogonale.

Travaux pratiques

§ Exemples de construction et d'emploi de bases orthonormales et de supplémentaires orthogonaux.

Il convient d'exploiter les espaces vectoriels $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{C}^n$ ainsi que les espaces vectoriels de polynômes et de fonctions.

Exemples de calcul et d'emploi de la projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie, de la distance à un tel sous-espace.

Il convient notamment d'exploiter l'approximation des fonctions.

Exemples de réduction d'endomorphismes et de matrices en base orthonormale.
Recherche d'une équation réduite d'une conique définie par une équation cartésienne dans un repère orthonormal.

ANALYSE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Le programme est organisé autour des concepts fondamentaux de suite (ou de série) et de fonction, qui permettent de modéliser le comportement des phénomènes discrets et des phénomènes continus. Les interactions entre le continu et le discret sont mises en valeur.

Le programme se place dans le cadre de l'espace vectoriel $\mathbf{K}^n$*, où* $\mathbf{K}$ *désigne* $\mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$*, muni d'une norme. Ce cadre permet notamment de décrire et d'étudier les notions de limite et de continuité.*

La maˆitrise du calcul différentiel et intégral à une variable et de ses interventions en géométrie différentielle constitue un objectif essentiel. L'intégration, la représentation des fonctions, notamment par des séries (séries entières, séries de Fourier), les équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2 tiennent une place majeure. Le programme comporte en outre quelques notions sur le calcul différentiel à plusieurs variables.

Le programme d'analyse combine l'étude des problèmes qualitatifs avec celle de problèmes quantitatifs. Il développe conjointement l'étude globale des suites et des fonctions et l'étude de leur comportement local ou asymptotique ; en particulier, il convient de mettre en valeur le caractère local des notions de limite, de continuité et de dérivabilité.

En analyse, les majorations et les encadrements jouent un rôle essentiel. Tout au long de l'année, il convient donc de dégager les méthodes usuelles d'obtention de majorations et de minorations : opérations sur les inégalités, emploi de la valeur absolue, du module ou d'une norme, emploi du calcul différentiel et intégral. Pour comparer des nombres, des suites ou des fonctions, on utilise systématiquement des inégalités larges (qui sont compatibles avec le passage à la limite), en réservant les inégalités strictes aux cas où elles sont indispensables.

Le programme d'analyse et géométrie différentielle comporte l'analyse et l'emploi d'algorithmes numériques relatifs aux suites et aux fonctions, ainsi que l'emploi du logiciel de calcul symbolique et formel.

I. SUITES ET FONCTIONS

Cette partie est organisée autour de quatre objectifs :
- Étudier les propriétés fondamentales de l'espace vectoriel normé $\mathbf{K}^n$ *en vue de fournir un cadre cohérent pour l'étude des suites et des fonctions.*
- Étudier le comportement global et asymptotique d'une suite ou d'une fonction.
- Décrire et mettre en œuvre des algorithmes d'approximation d'un nombre à l'aide de suites ou de séries et comparer leurs performances. Cette étude est menée en relation avec celle des fonctions et de l'algèbre linéaire.
- Exploiter les résultats de la théorie des fonctions pour l'étude de problèmes numériques (majorations d'expressions, problèmes d'optimisation, solutions d'équations numériques,. . .).

1- Suites convergentes, fonctions continues

L'objectif de ce chapitre est double :
- Consolider les acquis de première année sur les suites de nombres réels ou complexes et sur le comportement local et asymptotique d'une fonction à valeurs réelles ou complexes, grâce aux concepts de limite et de continuité.
- Étudier la continuité des applications de $\mathbf{K}^p$ *dans* $\mathbf{K}^n$*.*

L'équivalence des normes sur $\mathbf{K}^n$ *montre que de nombreux concepts importants sont indépendants du choix d'une norme : parties bornées, parties ouvertes, parties fermées, continuité d'une application, suites convergentes. Par conséquent, pour toutes ces notions, il est légitime de se placer dans le cadre de l'espace vectoriel* $\mathbf{K}^n$ *(sans préciser une norme particulière).*

En ce qui concerne le comportement global et asymptotique d'une suite, il convient de combiner l'étude de problèmes qualitatifs (monotonie, convergence, divergence. . .) avec celle de problèmes quantitatifs (majorations, encadrements, vitesse de convergence ou de divergence par comparaison aux suites de référence usuelles. . .).

De même, en ce qui concerne le comportement global et local (ou asymptotique) d'une fonction, il convient de combiner l'étude de problèmes qualitatifs (monotonie, existence de zéros, existence d'extrémums, existence de limites, continuité, dérivabilité. . .) avec celle de problèmes quantitatifs (majorations, encadrements, comparaison aux fonctions de référence au voisinage d'un point. . .).

Les applications étudiées dans ce chapitre sont définies sur une partie A *de* $\mathbf{K}^p$ *et à valeurs dans* $\mathbf{K}^n$*.*

a) Normes et distances

Tout développement sur les espaces vectoriels normés est hors programme.

Définition d'une norme, notée $x \mapsto \|x\|$ ou $x \mapsto N(x)$, sur un espace vectoriel E réel ou complexe ; distance associée, notée $(x,y) \mapsto d\,(x,y)$. Boules. Norme $x \mapsto \|x\| = (x\|x)^{1/2}$ associée à un produit scalaire $(x,y) \mapsto (x\|y)$ sur un espace vectoriel réel ou complexe.	Ces notions doivent être illustrées par de nombreux exemples issus de l'espace $\mathbf{K}^n$ et des espaces de fonctions. Les étudiants doivent connaˆitre notamment les normes N_1, N_2 et N_∞ sur $\mathbf{K}^n$ et sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}([a,b])$ des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs réelles ou complexes.

b) Suites d'éléments de $\mathbf{K}^p$

Sur l'espace vectoriel $\mathbf{K}^p$, toutes les normes sont équivalentes.	La démonstration de ce théorème est hors programme.
Définition des suites convergentes, des suites divergentes.	
Pour qu'une suite (u_n) d'éléments de $\mathbf{K}^p$ soit convergente, il faut et il suffit que ses coordonnées soient convergentes. Opérations algébriques sur les suites convergentes.	Les coordonnées de la limite sont alors les limites des coordonnées.

c) Continuité d'une application

Définition des parties bornées, des applications bornées. Définition des parties ouvertes, des parties fermées. Réunion et intersection finie de parties ouvertes, de parties fermées.	Les notions de voisinage d'un point, de point adhérent et de point intérieur à une partie, d'ouverts et de fermés relatifs à une partie sont hors programme.
Continuité d'une application en un point : soit f une application d'une partie A de $\mathbf{K}^p$ à valeurs dans $\mathbf{K}^n$ et a un point de A. On dit que f est continue au point a si, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que, pour tout élément x de A, la relation $\|x - a\| \leqslant \delta$ implique la relation $\|f(x) - f(a)\| \leqslant \varepsilon$.	
Limite de l'image d'une suite (u_n) admettant une limite a par une application f continue au point a.	
Définition des applications continues. Continuité de la composée de deux applications continues, de la restriction d'une application continue ; opérations algébriques sur les applications continues. Caractérisation de la continuité d'une application à valeurs dans $\mathbf{K}^n$ par la continuité de ses coordonnées.	Algèbre $\mathcal{C}(A)$ des fonctions à valeurs réelles ou complexes continues sur A.
Si f est à valeurs réelles, alors pour tout nombre réel α, l'ensemble des points x tels que $f(x) \geqslant \alpha$, ou tels que $f(x) = \alpha$, est une partie fermée de $\mathbf{K}^p$; l'ensemble des points x tels que $f(x) > \alpha$ est une partie ouverte de $\mathbf{K}^p$.	Il convient de souligner l'intérêt de ces résultats pour démontrer qu'une partie est ouverte (ou fermée).
Étant donnée une fonction f continue sur A à valeurs réelles, l'image par f d'une partie fermée bornée de $\mathbf{K}^p$ incluse dans A est une partie fermée bornée de $\mathbf{R}$; existence d'extrémums.	La démonstration de ce théorème est hors programme.
Toute application linéaire u de $\mathbf{K}^p$ dans $\mathbf{K}^n$ est continue. Continuité de l'application $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ de $\mathbf{K} \times \mathbf{K}^p$ dans $\mathbf{K}^p$.	Il existe un nombre réel $k > 0$ tel que, pour tout x, $N'\big(u(x)\big) \leqslant k\,N(x)$.

2- Séries de nombres réels ou complexes

L'objectif de ce chapitre est double :
- Étudier la convergence des séries de nombres réels positifs.
- Étudier les séries absolument convergentes de nombres réels ou complexes, à partir des résultats obtenus pour les séries de nombres réels positifs.

a) Suites et séries

Série $\sum u_n$ associée à une suite (u_n) de nombres réels ou complexes, suite (s_p) des sommes partielles de cette série.

Il convient de mettre en valeur et d'exploiter la correspondance bijective entre suites et séries.

Définition d'une série convergente et de sa somme, notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Espace vectoriel des séries convergentes.

Si la série $\sum u_n$ converge, u_n tend vers 0 ; la réciproque est fausse.

Caractérisation de la convergence d'une série de nombres complexes à l'aide des parties réelle et imaginaire.

Convergence d'une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroˆıt et tend vers zéro ; majoration du reste.

Aucune autre connaissance spécifique sur les séries semi-convergentes n'est exigible des étudiants.

b) Séries de nombres réels positifs

Pour qu'une série $\sum u_n$ de nombres positifs converge, il faut et il suffit que la suite (s_p) des sommes partielles soit majorée.

Convergence des séries géométriques de nombres réels positifs, convergence des séries de Riemann.

Théorème de comparaison des séries de nombres réels positifs : soient (u_n) et (α_n) des suites de nombres réels positifs telles que $u_n = O(\alpha_n)$; alors la convergence de $\sum \alpha_n$ implique la convergence de $\sum u_n$.

Comparaison d'une série de nombres réels positifs à une série géométrique, à une série de Riemann. Règle de d'Alembert.
Développement décimal d'un nombre réel positif.

c) Séries de nombres réels ou complexes

Séries absolument convergentes (c'est-à-dire telles que $\sum |u_n| < +\infty$). Toute série absolument convergente est convergente.

En outre, $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

Série géométrique : la série $\sum z^n$, où z appartient à $\mathbf{C}$, est absolument convergente si et seulement si $|z| < 1$; sa somme est alors égale à $\dfrac{1}{1-z}$.

En outre, si $|z| \geqslant 1$, cette série diverge.

Série exponentielle : pour tout nombre complexe z, la série $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ est absolument convergente.

Par définition, $\exp z = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$.

d) Suites et séries de fonctions

Dans ce paragraphe, les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ et à valeurs réelles ou complexes.

Étant donnée une suite (f_n) de fonctions définies sur I, définition de la convergence simple sur I ; définition de la convergence simple pour une série de fonctions.

La convergence uniforme des suites et des séries de fonctions est hors programme.

Une série $\sum f_n$ de fonctions à valeurs réelles ou complexes définies sur I est dite normalement convergente sur I si la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ est convergente. Convergence normale sur tout segment.

Pour établir la convergence normale de $\sum f_n$, il convient d'utiliser une série numérique convergente $\sum \alpha_n$ majorante, c'est-à-dire telle que, pour tout n, $\|f_n\|_\infty \leqslant \alpha_n$.

Si la série $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment de I et si, pour tout n, f_n est continue sur I, alors la somme de cette série est continue sur I.

La démonstration de ce résultat est hors programme.

Travaux pratiques

Exemples d'obtention de majorations et de minorations d'expressions réelles ou du module d'expressions complexes ; exemples d'emploi pour l'étude de suites et de fonctions.

§ Exemples d'étude du comportement global et asymptotique de suites de nombres réels, de nombres complexes.

Il convient d'entraˆiner les étudiants à exploiter la comparaison aux suites de référence et à classer des ordres de grandeur.

§ Exemples d'étude de suites de nombres réels définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et d'emploi d'une telle suite pour l'approximation d'un point fixe a de f.

Pour étudier la vitesse de convergence de u_n vers a, les étudiants doivent savoir exploiter le comportement local de f au voisinage de a et, notamment, une inégalité du type lipschitzien $|f(x) - f(a)| \leqslant k\,|x - a|$ où $0 \leqslant k < 1$, ou du type $|f(x) - f(a)| \leqslant \lambda\,|x - a|^2$.

§ Exemples d'étude de séries de nombres réels ou complexes.

II. FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE : DÉRIVATION ET INTÉGRATION

Le programme est organisé autour de quatre objectifs :
- Consolider les acquis de première année concernant la dérivation et l'intégration des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes.
- Étendre ces résultats au cas des fonctions d'une variable réelle à valeurs vectorielles.
- Étudier l'intégration et la dérivation des suites et séries de fonctions à valeurs réelles ou complexes.
- Effectuer une étude élémentaire des fonctions définies par des intégrales dépendant d'un paramètre.

Aussi bien pour l'étude locale que pour l'étude globale des fonctions, le programme combine de manière indissociable les outils du calcul différentiel et du calcul intégral.

1- Dérivation des fonctions à valeurs vectorielles

L'objectif de ce chapitre est double :
- Consolider les acquis de première année concernant la dérivation des fonctions à valeurs réelles ou complexes : dérivation en un point, propriétés globales des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.
- Étudier la dérivation des fonctions à valeurs vectorielles.

Les fonctions étudiées dans ce chapitre sont définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{K}^n$.

a) Dérivée en un point, fonctions de classe C^1

Définition de la dérivabilité d'une fonction f définie sur un intervalle I en un point a de I : dérivée, dérivée à gauche, à droite.

Les étudiants doivent connaˆitre et savoir exploiter l'interprétation cinématique et graphique de la notion de dérivée en un point.

Définition de la dérivabilité d'une fonction f sur un intervalle I, application dérivée ; application de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I.

Notations f', $\mathrm{D}f$, $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$·

Espace vectoriel $\mathcal{C}^1(I, \mathbf{K}^n)$ des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, linéarité de la dérivation, dérivée d'une application de la forme $u(f)$ où u est une application linéaire.
Caractérisation de la dérivabilité d'une fonction f à valeurs dans $\mathbf{K}^n$ à l'aide de ses coordonnées. Les coordonnées de $\mathrm{D}f$ sont les dérivées des coordonnées de f.

Dérivation du produit scalaire $(f|g)$, du carré de la norme $\|f\|_2$; lorsque e est un vecteur unitaire, orthogonalité de e et de $\mathrm{D}e$.

Cas d'une fonction f à valeurs complexes : pour que f soit de classe $\mathcal{C}^1$, il faut et il suffit que $\bar{f}$ le soit, ou encore que $\mathrm{Re}\,f$ et $\mathrm{Im}\,f$ le soient.

Dans ces conditions,

$$\mathrm{D}(\bar{f}) = \overline{\mathrm{D}f}, \quad \mathrm{D}f = \mathrm{D}(\mathrm{Re}\,f) + \mathrm{i}\,\mathrm{D}(\mathrm{Im}\,f).$$

Caractérisation des fonctions constantes parmi les fonctions continues sur I et dérivables sur l'intérieur de I.

b) Fonctions de classe C^k

Définition des applications de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I (k entier naturel ou $k = +\infty$).

Notations $f^{(k)}$, $\mathrm{D}^k f$, $\dfrac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}$.

Espace vectoriel $\mathcal{C}^k(I, \mathbf{K}^n)$ des applications de classe $\mathcal{C}^k$ sur I à valeurs dans $\mathbf{K}^n$, où $0 \leqslant k \leqslant +\infty$. Algèbre $\mathcal{C}^k(I)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I à valeurs réelles ou complexes.

Dérivée k-ième du produit de deux fonctions (formule de Leibniz).

La composée $f \circ \varphi$ d'une application f de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et d'une fonction φ de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle J à valeurs dans I est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J.
Définition d'un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de J sur I ($k \geqslant 1$).

Une fonction φ de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle J ($k \geqslant 1$) est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de J sur $I = \varphi(J)$ si et seulement si, pour tout élément t de J, $\varphi'(t) \neq 0$.

Une application f à valeurs dans $\mathbf{K}^n$ est dite de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur un segment $[a, b]$, où $1 \leqslant k \leqslant +\infty$, s'il existe une subdivision $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ de $[a, b]$ telle que la restriction de f à chacun des intervalles $]a_i, a_{i+1}[$ soit prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a_i, a_{i+1}]$. Lorsque $k = 0$, f est dite continue par morceaux sur $[a, b]$.

Une fonction f est dite de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur un intervalle I quelconque si sa restriction à tout segment est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux.

2- Intégration sur un segment des fonctions à valeurs réelles ou complexes

L'objectif de ce chapitre est double :
- Consolider les acquis de première année sur l'intégrale des fonctions à valeurs réelles ou complexes continues par morceaux sur un segment.
- Effectuer une étude élémentaire de l'intégration sur un segment des séries de fonctions continues à valeurs réelles ou complexes.

Le programme se limite à l'intégration des fonctions continues par morceaux sur un segment $J = [a, b]$ à valeurs réelles ou complexes. En vue de l'enseignement des autres disciplines scientifiques, il convient de donner quelques notions sur l'intégration des fonctions à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, par emploi des coordonnées, mais, en mathématiques, aucune connaissance sur ce point n'est exigible des étudiants.

a) Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Définition de l'intégrale d'une fonction φ en escalier sur J à valeurs réelles ou complexes. Notations $\int_J \varphi$, $\int_{[a,b]} \varphi$. Linéarité de l'intégrale.

Inégalité $|\int_J \varphi| \leqslant \int_J |\varphi|$.

Définition de l'intégrale d'une fonction f continue par morceaux sur un segment J à valeurs réelles ou complexes. Notations $\int_J f$, $\int_{[a,b]} f$. Linéarité de l'intégrale.

Inégalité $|\int_J f| \leqslant \int_J |f|$.

Pour les fonctions à valeurs réelles, positivité et croissance de l'intégrale.
Pour une fonction f à valeurs complexes, intégrale de $\bar{f}$, de $\mathrm{Re}\, f$, de $\mathrm{Im}\, f$.

Une fonction f continue et à valeurs positives sur un segment $[a, b]$ est nulle si et seulement si son intégrale est nulle.

Additivité de l'intégrale par rapport à l'intervalle d'intégration.

Valeur moyenne d'une fonction. Inégalité de la moyenne

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leqslant \int_{[a,b]} |f| \leqslant (b - a) \sup_{[a,b]} |f|.$$

Toute formule ou égalité dite de la moyenne est hors programme.

Étant donnée une fonction f continue par morceaux sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, définition de $\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t$, où a et b appartiennent à I.

Linéarité. Inégalité de la moyenne. Relation de Chasles.

b) Intégration sur un segment des séries de fonctions

Si une série $\sum f_n$ de fonctions continues sur $[a, b]$ converge normalement sur $[a, b]$, alors la série des intégrales est convergente et

$$\int_{[a,b]} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{[a,b]} f_n.$$

Produit scalaire $(f,g) \mapsto \int_{[a,b]} \bar{f}g$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}([a,b])$ des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs complexes ; inégalité de Cauchy-Schwarz. Norme de la convergence en moyenne quadratique $f \mapsto N_2(f) = (\int_{[a,b]} |f|^2)^{1/2}$.

Inégalité

$$N_2(f) \leqslant \sqrt{b-a}\, N_\infty(f).$$

3- Dérivation et intégration

L'objectif de ce chapitre est triple :
- Consolider les acquis de première année sur le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, et exploiter ce théorème pour l'étude globale des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.
- Étudier la primitivation des séries de fonctions à valeurs réelles ou complexes et appliquer les résultats obtenus à leur dérivation.
- Effectuer une étude élémentaire des fonctions définies par des intégrales dépendant d'un paramètre.

Les fonctions étudiées dans ce chapitre sont définies sur un intervalle I de **R** *et à valeurs réelles ou complexes.*

a) Primitives et intégrale d'une fonction continue

Définition d'une primitive g d'une fonction f continue sur un intervalle I.
Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

En vue de l'enseignement des autres disciplines scientifiques, il convient d'étendre cette définition au cas d'une fonction continue par morceaux sur I mais, en mathématiques, aucune connaissance sur ce point n'est exigible des étudiants.

Théorème fondamental : étant donnés une fonction f continue sur un intervalle I et un point a de I,

- La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a ; pour toute primitive h de f sur I,

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = h(x) - h(a).$$

- Pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Formule d'intégration par parties pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Changement de variable : étant données une fonction f continue sur I et une fonction φ à valeurs dans I de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$,

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Il convient de mettre en valeur l'intérêt de changements de variable affines, notamment pour exploiter la périodicité et les symétries, ou pour se ramener, par paramétrage du segment $[a,b]$, au cas où l'intervalle d'intégration est $[0,1]$ ou $[-1,1]$.

b) Étude globale des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Inégalité des accroissements finis : soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$. Si, pour tout élément t de $]a,b[$, $|f'(t)| \leqslant \lambda$, alors

$$|f(b) - f(a)| \leqslant \lambda\,(b-a).$$

Les étudiants doivent connaˆitre l'interprétation cinématique de ce résultat.

Si f est continue sur $[a,b]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b]$ et si f' a une limite finie en a, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

Extension aux applications de classe $\mathcal{C}^k$: si f est continue sur $[a,b]$, de classe $\mathcal{C}^k$ sur $]a,b]$ et si, pour tout $r \in [1,k]$, $\mathrm{D}^r f$ admet une limite finie en a, alors f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a,b]$.

c) Formules de Taylor

Pour une fonction de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur I, formule de Taylor à l'ordre k en un point a de I : expression intégrale du reste R_k. Majoration du reste R_k (inégalité de Taylor-Lagrange).

Décomposition $f(x) = T_k(x) + R_k(x)$, où

$$T_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{(x-a)^n}{n!} \mathrm{D}^n f(a).$$

Développement limité d'une primitive d'une fonction continue ; application au développement limité de la dérivée d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Existence d'un développement limité à l'ordre k pour une fonction de classe $\mathcal{C}^k$: formule de Taylor-Young.

d) Séries de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Dans ce paragraphe, les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ et à valeurs réelles ou complexes.

Dérivation terme à terme : soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs réelles ou complexes. Si les séries $\sum f_n$ et $\sum f'_n$ convergent normalement sur tout segment de I, alors la somme de la série $\sum f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et

$$\mathrm{D}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{D}\, f_n.$$

Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

L'application $e_z\ :\ t \mapsto \exp tz$, où z est un nombre complexe, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et $\mathrm{D}e_z = z\, e_z$.

e) Intégrales dépendant d'un paramètre

Continuité sous le signe $\int$: soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes continue sur $A \times [a,b]$, où A est un intervalle de $\mathbf{R}$. Alors la fonction g définie sur A par la relation $g(x) = \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur A.

La démonstration des résultats de ce paragraphe est hors programme.

Dérivation sous le signe $\int$ (formule de Leibniz) : lorsque f est continue sur $A \times [a,b]$ et admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $A \times [a,b]$, alors g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A, et

$$g'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

4- Intégration sur un intervalle quelconque

L'objectif de ce chapitre est d'étudier l'intégrabilité d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle, d'abord dans le cas des fonctions à valeurs positives, puis dans le cas des fonctions à valeurs réelles ou complexes.

Le programme se limite à l'intégration des fonctions continues par morceaux sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ à valeurs réelles ou complexes.

a) Fonctions intégrables à valeurs positives

Une fonction positive f continue par morceaux sur un intervalle $I = [a,b[$ est dite intégrable (ou sommable) sur $[a,b[$ s'il existe un nombre réel positif M tel que, pour tout élément x de $[a,b[$, $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M$.
Cas des fonctions définies sur $]a,b]$, sur $]a,b[$.

On pose alors

$$\int_I f = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_x \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Intégrabilité de $t \mapsto t^\alpha$ sur $[a,+\infty[$, sur $]0,a]$.

Opérations sur les fonctions continues par morceaux intégrables positives : somme, produit par un scalaire positif. Croissance : si f et g sont continues par morceaux sur $[a,b[$, si $0 \leqslant f \leqslant g$ et si g est intégrable, f l'est aussi et $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Une fonction f continue, positive et intégrable sur $[a,b[$ est nulle si et seulement si son intégrale est nulle.

b) Fonctions intégrables à valeurs complexes

Une fonction f à valeurs réelles ou complexes continue par morceaux sur $I = [a,b[$ est dite intégrable (ou sommable) sur $[a,b[$ si $|f|$ est intégrable sur I.

Cas des fonctions définies sur $]a,b]$, sur $]a,b[$.

Si f et φ sont continues par morceaux, si $|f| \leqslant \varphi$ et si φ est intégrable sur I, alors f est intégrable sur I.

Espace vectoriel des fonctions continues par morceaux intégrables sur I.

Une fonction f à valeurs réelles continue par morceaux est intégrable sur I si et seulement si f^+ et f^- le sont.

On pose alors $\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-$.

Une fonction f à valeurs complexes continue par morceaux est intégrable sur I si et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont.

On pose alors $\int_I f = \int_I \operatorname{Re} f + \mathrm{i} \int_I \operatorname{Im} f$.

Linéarité de l'intégrale. Si f est continue par morceaux intégrable,

$$\left| \int_I f \right| \leqslant \int_I |f|.$$

Étant donnée une fonction f continue sur $[a, b[$, à valeurs réelles ou complexes, il peut arriver que f ne soit pas intégrable sur $[a, b[$, mais que la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admette une limite au point b ; cette limite est encore notée, de manière impropre, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Aucune connaissance spécifique sur les intégrales semi-convergentes n'est exigible des étudiants.

5- Courbes du plan et de l'espace

L'objectif de ce chapitre est de consolider l'étude des courbes planes abordée en classe de première année et d'étendre ces notions aux courbes de l'espace.
L'étude des propriétés métriques des courbes du plan et de l'espace est hors programme.
La démarche du programme est de partir du point de vue cinématique (donnée d'un paramétrage) et d'introduire ensuite la notion de propriété géométrique en étudiant l'effet d'un changement de paramétrage.

Dans ce chapitre, on considère des fonctions f à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, où $n \leqslant 3$, de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I, où $1 \leqslant k \leqslant +\infty$.

a) Courbes paramétrées

Courbes paramétrées (ou arcs paramétrés) de classe $\mathcal{C}^k$.

Interprétation cinématique : mouvement, vitesse, accélération.

Effet d'un changement de paramétrage. Trajectoire d'un mouvement, orientation. Point régulier (à l'ordre 1).

Les changements de paramétrage sont supposés de classe $\mathcal{C}^k$ ainsi que leurs applications réciproques.

b) Étude locale d'un arc orienté Γ de classe $\mathcal{C}^k$

Définition des demi-tangentes en un point A de Γ, de la tangente en un point A. Existence d'une tangente en un point régulier.

Dans le cas d'une courbe plane, cas d'un point A où l'un au moins des vecteurs dérivés successifs est non nul.

L'étude locale en un point où tous les vecteurs dérivés successifs sont nuls est hors programme.

Travaux pratiques

Exemples d'emploi du calcul différentiel et intégral pour l'étude globale des fonctions.

Obtention de majorations et minorations de suites et de fonctions, recherche d'extrémums.

§ Exemples de méthodes de calcul de valeurs approchées d'intégrales et de comparaison de leurs performances.

La démarche consiste à subdiviser l'intervalle d'intégration et à approcher, sur chaque sous-intervalle, la fonction à intégrer par une fonction polynomiale.

Exemples d'étude de l'intégrabilité d'une fonction.

Exemples d'étude d'une fonction définie comme somme d'une série de fonctions (continuité, dérivation, intégration).

Exemples d'étude d'une fonction définie par une intégrale dépendant d'un paramètre.

§ Exemples d'étude de courbes paramétrées du plan ou de l'espace.

III. SÉRIES, SÉRIES ENTIÈRES, SÉRIES DE FOURIER

L'objectif de cette partie est triple :
- Approfondir l'étude des séries de nombres réels ou complexes : comparaison à une intégrale.
- Étudier les propriétés élémentaires des séries entières et des séries de Fourier.
- Exploiter la représentation des fonctions par des séries entières ou des séries de Fourier pour l'étude de fonctions définies comme solutions d'une équation, en relation avec l'enseignement des autres disciplines scientifiques.

1- Séries de nombres réels ou complexes

Comparaison d'une série de nombres réels positifs à une intégrale : étant donnée une fonction f continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ à valeurs réelles positives décroissante, la série de terme général

$$w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$$

est convergente. En particulier la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

La relation $w_n = \int_{n-1}^{n} [f(t) - f(n)]\,\mathrm{d}t$ permet d'encadrer w_n ; un encadrement analogue peut être obtenu lorsque f est croissante.

Équivalent de $n!$ (formule de Stirling).

2- Séries entières

L'objectif de ce chapitre est double :
- Étudier la convergence d'une série entière et les propriétés de sa somme, grâce au concept fondamental de rayon de convergence.
- Introduire la notion de développement d'une fonction en série de Taylor, notamment pour le développement en série entière des fonctions élémentaires.
En ce qui concerne le développement de $t \mapsto \mathrm{e}^{tz}$ où t est réel et z complexe, il s'agit d'établir que cette fonction, déjà étudiée en première année, est aussi égale à $t \mapsto \exp tz$, définie à partir de la série exponentielle d'un nombre complexe.
Les coefficients des séries entières considérées dans ce paragraphe sont réels ou complexes.

a) Rayon de convergence d'une série entière

Série entière $\sum a_n z^n$ d'une variable complexe z associée à une suite (a_n) de nombres complexes : définition du rayon de convergence R (fini ou non).

L'étude de la série sur le cercle $|z| = R$ est hors programme.

Étant donné un nombre réel $\rho > 0$ tel que $|a_n|\rho^n$ soit borné, alors pour tout nombre complexe z tel que $|z| < \rho$, $|a_n z^n|$ est dominé par $\left(\dfrac{|z|}{\rho}\right)^n$.

La série est absolument convergente sur le disque (ouvert) de convergence.

Rayon de convergence de la somme de deux séries entières. Linéarité de la somme.

L'étude du produit de deux séries entières est hors programme.

b) Séries entières d'une variable réelle

Une série entière $\sum a_n t^n$ d'une variable réelle t dont le rayon de convergence R est strictement positif est normalement convergente sur tout segment de l'intervalle de convergence.

Continuité de la somme sur l'intervalle de convergence.

Une primitive sur l'intervalle $]-R, R[$ de la somme f de cette série s'obtient en intégrant terme à terme.

Invariance du rayon de convergence d'une série entière par intégration terme à terme, par dérivation terme à terme.

La somme f d'une série entière $\sum a_n t^n$ dont le rayon de convergence R est strictement positif est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$. En outre, pour tout $k \geqslant 1$, $\mathrm{D}^k f$ s'obtient par dérivation terme à terme.

En particulier, pour tout entier k positif ou nul,

$$a_k = \frac{1}{k!}\,\mathrm{D}^k f(0).$$

Définition d'une fonction développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$, où $r > 0$.
Définition de la série de Taylor d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle $]-r, r[$, où $r > 0$.

Développement en série de Taylor de e^{tz} où z est complexe, de $\sin t$, de $\cos t$. Développement de $\ln(1+t)$, de $(1+t)^\alpha$ où α est réel.

3- Séries de Fourier

L'objectif de ce chapitre est triple :
- Étudier les coefficients de Fourier d'une fonction f périodique, et notamment leur comportement asymptotique en fonction de la régularité de f.
- Étudier la convergence en moyenne quadratique des sommes partielles $S_p(f)$ de la série de Fourier de f en utilisant la structure d'espace préhilbertien.
- Étudier la convergence ponctuelle des sommes $S_p(f)$: convergence normale, théorème de Dirichlet.
Il convient d'exploiter l'interprétation en termes d'analyse harmonique des signaux périodiques.
Dans ce chapitre, les fonctions considérées sont à valeurs complexes, 2π-périodiques et continues par morceaux sur $\mathbf{R}$. *Le cas des fonctions T-périodiques s'y ramène par changement de variable.*

a) Coefficients de Fourier

Espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes 2π-périodiques continues par morceaux sur $\mathbf{R}$.

Définition d'une fonction 2π-périodique continue par morceaux f à partir d'une fonction g continue par morceaux sur un segment de longueur 2π.

Intégrale sur une période d'une fonction f à valeurs complexes 2π-périodique continue par morceaux sur $\mathbf{R}$.

Définition des coefficients de Fourier d'une telle fonction :

$$\hat{f}(n) = c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt.$$

Expression des coefficients de Fourier sous forme de cosinus et de sinus.

Coefficients de Fourier de $\bar{f}$; cas d'une fonction à valeurs réelles. Coefficients de Fourier de $t \mapsto f(-t)$; cas d'une fonction paire, d'une fonction impaire. Effet d'une translation : coefficients de Fourier de $t \mapsto f(t+a)$.

Pour tout entier naturel p, définition de la somme partielle :

$$S_p(f)(x) = \sum_{n=-p}^{p} c_n(f)\, e^{inx}.$$

Lorsque qu'en un point x de $\mathbf{R}$ les sommes partielles $S_p(f)$ convergent, la série de Fourier est dite convergente au point x et la somme de la série de Fourier est, par définition, la limite des sommes $S_p(f)(x)$.

L'application $\mathcal{F}$ qui à f associe $\hat{f}$ est linéaire. La suite $\hat{f}$ est bornée et $\|\hat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$.

Par définition $\|f\|_1 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\, dt$.

Coefficients de Fourier d'une dérivée : si f est 2π-périodique continue sur $\mathbf{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbf{R}$, alors

$$c_n(\mathrm{D}f) = \mathrm{i}n\, c_n(f).$$

Extension au cas où f est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur $\mathbf{R}$ et de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur $\mathbf{R}$.

b) Convergence en moyenne quadratique.

Dans ce paragraphe, on considère des fonctions 2π-périodiques continues sur $\mathbf{R}$. *Il convient d'effectuer une brève extension au cas des fonctions continues par morceaux ; les démonstrations concernant cette extension ne sont pas exigibles des étudiants.*

Produit scalaire $(f, g) \mapsto (f|g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(t)\, g(t)\, dt$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}_{2\pi}$ des fonctions 2π-périodiques continues sur $\mathbf{R}$; norme associée $f \mapsto \|f\|_2$.

Les fonctions $t \mapsto e_n(t) = e^{int}$, où n parcourt $\mathbf{Z}$, forment une famille orthonormale et, pour tout n, $c_n(f) = (e_n|f)$.

La projection orthogonale d'un élément f de $\mathcal{C}_{2\pi}$ sur le sous-espace vectoriel $\mathcal{P}_p$ engendré par les e_n, où $|n| \leqslant p$, est la somme partielle $S_p(f)$.
Relation

$$\|f\|^2 = (\|S_p(f)\|_2)^2 + d\,(f, \mathcal{P}_p)^2.$$

En particulier, l'application qui à tout élément P de $\mathcal{P}_p$ associe $\|f - P\|_2$ atteint son minimum en un point et un seul, à savoir $S_p(f)$.

Inégalité de Bessel :

$$\sum_{n=-p}^{p} |c_n(f)|^2 \leqslant (\|f\|_2)^2.$$

En particulier, $c_n(f)$ et $c_{-n}(f)$ tendent vers 0.

Convergence en moyenne quadratique : pour tout élément f de $\mathcal{C}_{2\pi}$, les sommes partielles $S_p(f)$ convergent en moyenne quadratique vers f.

Formule de Parseval : expressions du carré de la norme et du produit scalaire à l'aide des coefficients de Fourier.

c) Convergence ponctuelle

Convergence normale : lorsque f est 2π-périodique continue sur $\mathbf{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbf{R}$, les sommes $\sum_{n=p}^{p} |(c_n(f)|$ sont majorées.

Dans ces conditions, pour tout nombre réel x, la série de Fourier de f converge en ce point, et sa somme est égale à $f(x)$.

Théorème de Dirichlet : soit f une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbf{R}$, alors pour tout nombre réel x, la série de Fourier de f converge en ce point et sa somme est égale à $\frac{1}{2}\lim_h \big[f(x+h) + f(x-h)\big]$ où h tend vers 0, $h > 0$. En particulier, en tout point x où f est continue, la somme de la série de Fourier de f est égale à $f(x)$.

Travaux pratiques

§ Pour une série de nombres réels positifs, exemples d'encadrement du reste d'une série convergente, des sommes partielles d'une série divergente ; exemples de recherche de valeurs approchées de la somme d'une série convergente.

Il convient notamment d'exploiter la comparaison d'une série à une intégrale.

§ Exemples de recherche et d'emploi de développements en série entière ou en série de Fourier de fonctions d'une variable réelle ; exemples d'utilisation de tels développements pour l'approximation d'une fonction.

Il convient de mettre en valeur l'emploi de séries entières pour la recherche et l'étude de solutions d'équations différentielles.

IV. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

L'objectif de cette partie est d'étudier les systèmes différentiels linéaires à coefficients constants et les équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2.
Il convient de relier cette étude à l'enseignement des autres disciplines scientifiques (systèmes mécaniques ou électriques gouvernés par une loi d'évolution et une condition initiale, traitement du signal). Il convient d'étudier le comportement du signal de sortie associé à différents types de signaux d'entrée et de dégager la signification de certains paramètres ou comportements : stabilité, régime permanent, oscillation, amortissement, fréquences propres, résonance. On peut être alors amené à étendre la notion de solution (fonction $\mathcal{C}^1$ ou $\mathcal{C}^2$ par morceaux).

1- Équations différentielles linéaires

L'objectif de ce chapitre est double :
- Étudier les systèmes différentiels linéaires d'ordre 1 à coefficients constants, en relation avec la réduction des matrices.
- Étudier les équations linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2.

a) Systèmes linéaires à coefficients constants

Définition d'une solution sur un intervalle I de l'équation différentielle $X' = AX$, où A est une matrices réelle ou complexe. Existence et unicité de la solution sur I du problème de Cauchy.

La démonstration de ce résultat est hors programme.

b) Équations linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2

Équation $a(t)\,x' + b(t)\,x = c(t)$ où a, b et c sont continues sur I à valeurs réelles ou complexes.

Structure de l'espace des solutions lorsque a ne s'annule pas sur I.

Équation $a(t)\,x'' + b(t)\,x' + c(t)\,x = d(t)$ où a, b, c et d sont continues sur I à valeurs réelles ou complexes. Lorsque a ne s'annule pas sur I, existence et unicité de la solution sur I du problème de Cauchy.

La démonstration de ce résultat est hors programme.

Structure de l'espace des solutions de l'équation homogène, systèmes fondamentaux de solutions. Résolution de l'équation par la méthode de variation des constantes.

Expression des solutions dans le cas où l'on connaˆit une solution de l'équation homogène associée ne s'annulant pas sur I.

2- Notions sur les équations différentielles non linéaires

En vue de l'enseignement des autres disciplines scientifiques, il convient d'introduire quelques notions sur les équations différentielles non linéaires mais, en mathématiques, aucune connaissance sur ce point n'est exigible des étudiants.

Travaux pratiques

§ Pratique de la résolution de l'équation $X' = A\,X$, où A est une matrice diagonalisable à éléments réels ou complexes.

Exemples d'étude de solutions d'équations différentielles linéaires d'ordre 1 ou 2.

V. FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES RÉELLES

L'objectif de cette partie est très modeste : introduire quelques notions sur le calcul différentiel portant sur les fonctions numériques de deux ou trois variables réelles.

1- Calcul différentiel

L'objectif essentiel est d'introduire quelques notions de base : dérivée selon un vecteur, dérivées partielles, développement limité à l'ordre 1, différentielle, gradient et de les appliquer aux extrémums locaux et aux coordonnées polaires ; en revanche, la notion de fonction différentiable en un point est hors programme.

Les fonctions f considérées dans ce chapitre sont à valeurs réelles et définies sur un ouvert U de $\mathbf{R}^p$, où $p \leqslant 3$.

En vue de l'enseignement des autres disciplines scientifiques, il convient d'étendre brièvement ces notions au cas où f est à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, où $n \leqslant 3$, par emploi des coordonnées, mais, en mathématiques, aucune connaissance sur ce point n'est exigible des étudiants.

a) Dérivées partielles premières

Définition de la dérivée de f en un point a de U selon un vecteur h, notée $\mathrm{D}_h f(a)$. Définition des dérivées partielles, notées $\mathrm{D}_j f(a)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

Définition d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (ou continûment différentiable) : les dérivées partielles $\mathrm{D}_j f$ sont continues sur U. Algèbre $\mathcal{C}^1(U)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que, pour tout élément $t \in [-\delta, \delta]$, $a + th$ appartienne à U ; on pose alors $\varphi_h(t) = f(a + th)$. Si φ_h est dérivable à l'origine, on dit que f admet une dérivée au point a de U selon le vecteur h, et l'on pose $\mathrm{D}_h f(a) = \varphi_h'(0)$.

Théorème fondamental : si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, alors f admet, en tout point a de U, une dérivée selon tout vecteur h, et

$$\mathrm{D}_h f(a) = \sum_{j=1}^{p} h_j \mathrm{D}_j f(a).$$

La démonstration de ce résultat est hors programme.
En particulier, l'application $h \mapsto \mathrm{D}_h f(a)$ est une forme linéaire appelée différentielle de f au point a et notée $\mathrm{d}f(a)$.

Dérivée d'une fonction composée de la forme $f \circ \varphi$, où φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I et à valeurs dans U.

Dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^p$, le gradient de f est défini par

$$\mathrm{d}f(a)(h) = \mathrm{D}_h f(a) = (\mathrm{grad} f(a) | h).$$

Coordonnées du gradient.

Points critiques d'une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$; condition nécessaire d'existence d'un extrémum local.

b) Dérivées partielles d'ordre $k \geqslant 2$

Théorème de Schwarz pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.

La démonstration du théorème de Schwarz est hors programme.

c) Coordonnées polaires

Repère polaire $(\vec{u}, \vec{v})$ du plan euclidien $\mathbf{R}^2$ défini, pour tout nombre réel θ, par :

$$\vec{u}\,(\theta) = \cos\theta\ \vec{e_1} + \sin\theta\ \vec{e_2},$$

$$\vec{v}\,(\theta) = -\sin\theta\ \vec{e_1} + \cos\theta\ \vec{e_2}$$

où $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est la base canonique de $\mathbf{R}^2$.

Coordonnées polaires d'un point de $\mathbf{R}^2$.

Relations

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{u}}{\mathrm{d}\,\theta} = \vec{v}, \quad \frac{\mathrm{d}\,\vec{v}}{\mathrm{d}\,\theta} = -\vec{u}.$$

Expression des coordonnées du gradient d'une fonction à valeurs réelles f de classe $\mathcal{C}^1$ en fonction des dérivées partielles de la fonction

$$(\rho, \theta) \mapsto F(\rho, \theta) = f(\rho\,\cos\theta, \rho\,\sin\theta).$$

d) Notions sur les courbes et les surfaces

Dans ce paragraphe, les courbes du plan ou de l'espace et les surfaces sont définies par paramétrages ou par équations cartésiennes. Aucune difficulté ne peut être soulevée sur l'équivalence de ces définitions.

L'objectif, très modeste, est d'introduire la notion de tangente à une courbe plane définie par une équation cartésienne $F(x, y) = 0$, et de plan tangent à une surface définie par une équation cartésienne $F(x, y, z) = 0$. L'étude des courbes d'une surface définies par des conditions différentielles est hors programme.

Aucune difficulté théorique ne peut être soulevée sur les notions étudiées dans ce paragraphe. Toutes les formes du théorème des fonctions implicites utiles pour traiter ce paragraphe sont admises.

Définition d'un point régulier d'une surface définie par paramétrage $(u, v) \mapsto f(u, v)$, où f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbf{R}^2$ à valeurs dans $\mathbf{R}^3$. Plan tangent, normale. Tangente à l'intersection de deux surfaces en un point régulier où les deux plans tangents sont distincts.

Définition d'un point régulier d'une courbe plane définie par une équation cartésienne $F(x, y) = 0$, où F est à valeurs réelles et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbf{R}^2$. Tangente, normale. Cas d'une surface.

2- Calcul intégral

a) Intégrales doubles

En vue de l'enseignement des autres disciplines scientifiques, il convient de donner quelques notions sur les intégrales doubles et triples :
- Intégrales doubles : linéarité, croissance, additivité par rapport au domaine d'intégration, calcul par intégrations successives, exemples simples de changements de variables.
- Brève extension aux intégrales triples.
- Exemples d'applications aux calculs d'aires planes et de volumes.
En mathématiques, aucune connaissance sur ces différents points n'est exigible des étudiants.

b) Champs de vecteurs du plan et de l'espace

En vue de l'enseignement des autres disciplines scientifiques, il convient de donner quelques notions sur les champs de vecteurs du plan et de l'espace : divergence, rotationnel, circulation, potentiel scalaire.
En mathématiques, aucune connaissance sur ces différents points n'est exigible des étudiants.

Travaux pratiques

Exemples d'emploi de coordonnées polaires, cylindriques ou sphériques.

§ Exemples de recherche d'extrémums locaux ou globaux.

Exemples de recherche de solutions d'équations aux dérivées partielles par séparation ou changement de variables.

§ Exemples de représentation d'une surface à l'aide d'une famille de sections planes.