CLASSES SUPÉRIEURES ET SPÉCIALES TPC

OBJECTIFS DE FORMATION ET PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES

I OBJECTIFS DE FORMATION

1) Objectifs généraux de la formation

Dans la filière TPC, les mathématiques constituent conjointement une discipline scientifique à part entière, développant des concepts, des résultats, des méthodes et une démarche spécifiques, et une discipline fournissant des connaissances et des méthodes nécessaires à la physique, à l'informatique, à la chimie et aux sciences industrielles.

La réflexion sur les concepts et les méthodes, la pratique du raisonnement, consituent un objectif majeur. Les étudiants doivent connaître les définitions et les énoncés des théorèmes figurant au programme, savoir analyser la portée des hypothèses et des résultats, et savoir mobiliser leurs connaissances pour l'étude de problèmes. Aucune démonstration n'est exigible des étudiants ; celles qui sont utiles à une bonne compréhension du cours peuvent être effectuées par le professeur. En revanche, certains résultats puissants utiles aux sciences de l'ingénieur sont admis.

a) *Objectifs de la formation*

La formation est conçue en fonction de deux objectifs essentiels.
- Développer conjointement l'intuition, l'imagination, le raisonnement et la rigueur.
- Promouvoir la réflexion personnelle des étudiants sur les problèmes et les phénomènes mathématiques, sur la portée des concepts, des hypothèses, des résultats et des méthodes, au moyen d'exemples et de contre exemples.

b) *Unité de la formation scientifique*

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme d'une même discipline, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. Plus largement, l'enseignement d'une discipline scientifique est à relier à celui des autres disciplines sous deux aspects principaux : organisation concertée des activités d'enseignement d'une même classe ; étude de questions mettant en œuvre des interactions entre les champs de connaissances (mathématiques et physique, mathématiques et informatique, mathématiques et chimie...).
La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, y contribue de façon efficace.

Il importe aussi que le contenu culturel des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, les textes et les références historiques permettent d'analyser l'interaction entre les problèmes mathématiques et la construction des concepts, mettent en évidence le rôle central joué par le questionnement scientifique pour le développement théorique et montrent en outre que les sciences, et les mathématiques en particulier, sont en perpétuelle évolution et que le dogmatisme n'est pas la référence en la matière.

2) Architecture et contenus des programmes

a) *Intentions majeures*

Les contenus sont organisés autour de quatre intentions majeures.

- Réaliser un équilibre global entre l'algèbre, l'analyse et la géométrie. Il va de soi, d'ailleurs, que cette séparation traditionnelle n'est qu'une commodité de rédaction et ne doit pas faire oublier les interactions nombreuses et étroites entre ces trois grands domaines des mathématiques. Dans cette intention, les programmes sont présentés selon deux grandes parties : analyse et géométrie différentielle, algèbre et géométrie.

- Organiser les programmes autour de quelques notions essentielles, en dégageant les idées majeures et leur portée, en fournissant des outils puissants et efficaces, en évitant toute technicité gratuite, et en écartant les notions qui ne pourraient être traitées que de façon superficielle.

- Mettre en valeur le caractère plurivalent des concepts mathématiques. Cette plurivalence s'inscrit dans un double mouvement : d'une part, l'étude d'un domaine particulier vient enrichir le concept général, grâce au langage et aux méthodes propres à ce domaine ; d'autre part, le concept général permet le transfert des connaissances d'un domaine d'application à un autre. C'est dans cette perspective, et à l'opposé de tout dogmatisme, que les structures constituent un outil pour une meilleure compréhension et une meilleure précision de la pensée et fournissent des méthodes pour l'étude des problèmes mathématiques.

- Donner un rôle très important aux travaux pratiques, dont la fonction est double : indiquer le champ des problèmes et phénomènes mathématiques à étudier en relation avec les concepts figurant au programme ; préciser les méthodes et les techniques usuelles exigibles des étudiants. En revanche, les travaux pratiques ne doivent pas conduire à des dépassements de programme prenant la forme d'une anthologie d'exemples dont la connaissance serait exigible des étudiants.

b) *Secteur de l'analyse et de ses interventions*

Dans ce secteur, le programme est centré autour des concepts fondamentaux de fonction, qui permet de modéliser le comportement de modèles continus, et de suite (ou de série), qui permet de modéliser le comportement des phénomènes discrets. Les interactions entre le continu et le discret sont mises en valeur, notamment en seconde année.
Le programme d'analyse combine l'étude des problèmes qualitatifs avec celle de problèmes quantitatifs ; il développe conjointement l'étude du comportement global de suite ou de fonction avec celle de leur comportement local ou asymptotique. Pour l'étude des solutions des équations, il combine les problèmes d'existence et d'unicité, les méthodes de calcul exact, les méthodes d'approximation et les algorithmes de mise en œuvre. Pour l'ensemble de l'analyse, il met l'accent sur les techniques de majoration.
En première année, la maîtrise du calcul différentiel et intégral à une variable et de ses interventions en géométrie différentielle plane constitue un objectif essentiel.
En seconde année, la représentation des fonctions, notamment par des séries (séries entières, séries de Fourier) et par des intégrales (notions sur les transformations de Fourier et de Laplace et sur les intégrales eulériennes), l'approximation des fonctions, l'étude des équations différentielles et des fonctions de plusieurs variables (également en interaction étroite avec la géométrie différentielle) tiennent une place majeure.

c) *Secteur de l'algèbre et de ses interventions*

Dans ce secteur, le programme est centré autour des concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire (points de vue géométrique et matriciel), tandis que l'étude des anneaux et des corps ainsi que l'étude générale des groupes en ont été écartées. Le programme met en œuvre les méthodes de l'algèbre linéaire pour la résolution de problèmes issus, non seulement des autres secteurs de l'algèbre, mais aussi de l'analyse et de la géométrie.
En première année, le programme d'algèbre et géométrie est organisé autour de l'algèbre linéaire (espaces vectoriels, applications linéaires, algèbres, calcul matriciel) et de ses interventions en algèbre, en analyse et en géométrie affine et euclidienne du plan et de l'espace.
En seconde année, le programme est organisé autour de l'algèbre linéaire (réduction des endomorphismes d'un espace vectoriel et des endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien, réduction des matrices).

d) *Secteur de la géométrie et de ses interventions*

Une vision géométrique des problèmes imprégne l'ensemble du programme de mathématiques car les méthodes de la géométrie jouent un rôle capital en algèbre, en analyse et dans leurs domaines d'intervention : apports du langage géométrique et des modes de représentation.

e) *Articulation avec la physique et la chimie*

En relation étroite avec les concepts propres à la physique et à la chimie (mécanique, électrocinétique, électronique, automatique, optique, cinétique chimique), le programme valorise les interprétations cinématiques et dynamiques des concepts de l'analyse et de la géométrie, ainsi que leurs interprétations en termes de signaux continus ou discrets (vitesse et accélération, trajectoires et lignes de niveau, équations différentielles modélisant l'évolution de systèmes mécaniques, physiques ou chimiques). Ces interprétations, conjointement avec les interprétations graphiques et géométriques, viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse.

f) *Rôle de la pensée algorithmique*

En relation avec le programme d'informatique, l'ensemble du programme de mathématiques valorise la démarche algorithmique ; il intégre la construction et la mise en forme d'algorithmes et, sur des exemples, la comparaison de leurs performances. En mathématiques, aucune connaissance sur la théorie des algorithmes n'est exigible des étudiants.
Les algorithmes associés aux notions étudiées dans le programme de mathématiques en font partie, qu'ils soient mentionnés dans le texte même du programme ou dans les travaux pratiques. En outre, de nombreux travaux

pratiques donnent lieu à l'exploitation du logiciel de calcul symbolique et formel étudié dans le programme d'informatique.

g) *Emploi des calculatrices*

Cet emploi est défini par la réglementation en vigueur. Les étudiants doivent savoir utiliser une calculatrice programmable dans les situations liées au programme de la classe et de la discipline considérées. Cet emploi combine les capacités suivantes, qui constituent un savoir–faire de base et sont seules exigibles :
- savoir effectuer des opérations arithmétiques sur les nombres réels et savoir comparer deux nombres réels ;
- savoir utiliser les touches des fonctions qui figurent au programme de la classe considérée et savoir programmer le calcul des valeurs d'une fonction d'une ou plusieurs variables permis par ces touches ;
- savoir programmer une instruction séquentielle, une instruction conditionnelle et une instruction itérative comportant éventuellement un test d'arrêt.

3) Conception et organisation de la formation

a) *Organisation du travail de la classe*

On ne saurait se borner à l'exposé, si parfait soit–il, de théories éventuellement suivies d'applications. Il convient au contraire de centrer l'enseignement autour de l'étude de phénomènes et de problèmes mathématiques, les concepts et les développements théoriques étant au service de cette étude. En particulier, il est essentiel que l'approfondissement théorique ne soit coupé ni des problématiques qui le sous–tendent, ni des secteurs d'intervention qui le mettent en jeu. Deux objectifs essentiels sont à poursuivre :
- Promouvoir l'acquisition de méthodes ; la classe est un lieu de découverte, d'exploitation de problématiques, un lieu de réflexion et de débats sur les démarches suivies, d'analyse des hypothèses d'un théorème et de la portée des concepts mis en jeu et des résultats obtenus. Elle est aussi un lieu d'élaboration de synthèses ayant pour triple objectif de dégager clairement les idées et méthodes essentielles, de préciser leur portée pour la résolution de problèmes et, inversement, d'analyser les principales méthodes dont on dispose pour étudier un type donné de problème. Dans cette perspective, les enseignements combinent de façon organique la formulation et l'analyse de problèmes, l'élaboration de concepts, la présentation, la démonstration et la mise en œuvre de résultats, ainsi que la mise en valeur de méthodes.
- Développer les capacités de communication. La pertinence des indications écrites et orales données par le professeur et la qualité de structuration des échanges interpersonnels jouent ici un rôle essentiel : qualités d'écoute et d'expression orale (formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée...), qualités de lecture et d'expression écrite (maîtrise du tableau, prise de notes, analyse d'un énoncé, mise au point de la rédaction d'un énoncé ou d'un raisonnement...). La communication utilise des moyens diversifiés : non seulement le tableau, dont la maîtrise est un élément important, mais aussi le rétroprojecteur et l'ordinateur connecté à un dispositif de projection approprié.

b) *Organisation du travail personnel des étudiants*

Les travaux effectués en dehors du temps d'enseignement, à la maison ou au lycée, ont une importance capitale ; leurs fonctions sont diversifiées :
- L'étude du cours joue un rôle central. Son objectif est double ; connaître les concepts et résultats essentiels, maîtriser les méthodes d'étude des problèmes. L'étude du cours est donc indissociable de celle des problèmes.
- La résolution d'exercices d'entraînement, combinée avec l'étude du cours, a pour fonction d'affermir les connaissances de base des étudiants et d'évaluer leur capacité à les mettre en œuvre sur des exemples simples. La résolution de tels exercices n'est donc pas un objectif en soi, et tout excès de technicité doit être évité.
- L'étude de questions plus complexes, sous forme de préparation d'activités en classe ou de problèmes à résoudre et à rédiger, alimente le travail de recherche, individuel ou en équipe, et permet aux étudiants d'évaluer leur capacité à mobiliser leurs connaissances de façon coordonnée.
- Les travaux individuels de rédaction en temps libre (solution d'un problème, mise au point d'exercices étudiés en classe, rapport de synthèse sur un thème d'étude, analyse critique d'un texte...) visent essentiellement à développer les capacités d'expression écrite et de mise au point d'un raisonnement. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements, constituent des objectifs très importants. Ces travaux de rédaction doivent donc être fréquents, mais leur longueur doit rester raisonnable.
- Les épreuves écrites en temps limité ont pour objectif principal de préparer les étudiants aux épreuves écrites des concours. Les connaissances à mettre en œuvre dans ces épreuves ne doivent en aucun cas dépasser les exigences mentionnées par le programme. Quand il s'agit d'épreuves de concours de longueur importante, le barême doit en tenir compte. En première période des classes de première année, ces épreuves doivent être de taille raisonnable et de difficulté progressive, afin de ne pas décourager les étudiants et de leur permettre de rédiger clairement une solution.

c) *Évaluation et notation des étudiants*

La communication des objectifs à atteindre et la mise en œuvre de formes diversifiées d'évaluation peuvent aider de manière efficace les étudiants à progresser, à se situer et à affiner un choix d'orientation.
La pertinence du calibrage de la notation constitue un objectif important ; ce calibrage doit être établi en relation avec les performances attendues des étudiants des classes de première année dans les épreuves d'admission en seconde année ou celles attendues des étudiants de seconde année dans les épreuves de concours. Il convient d'éviter tant la surnotation, génératrice d'illusion, que la sousnotation, génératrice de découragement.

4) Interprétation et délimitation des programmes

a) *Objectifs*

Pour chacune des classes, les connaissances et les capacités exigibles des étudiants sont indiquées avec précision, de façon à combattre l'inflation théorique autant que l'excès de technicité. Il importe de souligner la nécessité impérieuse de respecter les limites du programme, tant au niveau de l'enseignement qu'à celui des concours. Un encyclopédisme relayé par la pratique du bachotage irait totalement à l'encontre du but recherché, qui tend à privilégier une formation de l'esprit scientifique fondée sur l'approfondissement d'un noyau limité de connaissances fondamentales. Il importe que cet état d'esprit trouve sa traduction dans les sujets proposés aux concours.

b) *Organisation du texte des programmes*

Ce texte est organisé en deux titres : analyse et géométrie différentielle, algèbre et géométrie. Chacun de ces titres comporte des parties (numérotées I, II, ...), elles–mêmes subdivisées en chapitres (numérotés 1, 2, ...), puis en paragraphes (repérés a, b, ...). Chacune des parties comporte :
- En tête de partie ou de chapitre, un bandeau définissant les objectifs essentiels et délimitant le cadre général d'étude des notions relatives à cette partie ou à ce chapitre.
- Pour chaque paragraphe, un texte présenté en deux colonnes ; à gauche sont fixées les connaissances et les méthodes figurant au programme, à droite un commentaire indique les exemples fondamentaux à connaître et les méthodes à maîtriser, précise le sens ou les limites à donner à certaines questions, et repère le cas échéant l'interaction du sujet étudié avec d'autres parties du programme.
- En fin de partie, des travaux pratiques, également présentés en deux colonnes ; à gauche sont fixés d'une part le champ des questions mathématiques à étudier et d'autre part les méthodes et les techniques à connaître et à savoir mettre en œuvre, à droite un commentaire indique des repères pour le niveau d'approfondissement à donner à cette étude ou à cettte mise en œuvre. Les travaux pratiques qui doivent donner lieu à l'emploi du logiciel de calcul symbolique et formel étudié en informatique sont repérés par le signe §.

c) *Connaissances et capacités exigibles des étudiants*

Parmi les connaissances (définitions, notations, énoncés, exemples, contre exemples, méthodes, algorithmes...) et les capacités de mise en œuvre de ces connaissances, le texte du programme délimite de manière précise trois catégories.
- Celles qui sont exigibles des étudiants : il s'agit de l'ensemble des points figurant dans la colonne de gauche des différents paragraphes et des points qui sont repérés comme tels dans la colonne de droite, dans les bandeaux ou dans les travaux pratiques.
- Celles qui sont indiquées dans les bandeaux ou dans la colonne de droite comme étant "hors programme". Elles ne doivent pas être traitées et ne peuvent faire l'objet d'aucune épreuve d'évaluation.
- Celles qui relèvent d'activités possibles ou souhaitables, mais qui ne sont pas exigibles des étudiants : il s'agit de tous les travaux pratiques dont l'énoncé commence par la locution "exemples de ..." (dont la fonction est d'indiquer le champ des problèmes et des phénomènes mathématiques à étudier) et des points repérés dans les bandeaux ou dans la colonne de droite par la locution "aucune connaissance spécifique sur ... n'est exigible des étudiants", accompagnée le cas échéant de la locution "les méthodes à suivre, ou les indications utiles, doivent être fournies aux étudiants".

En outre, pour l'ensemble du programme, aucune démonstration des résultats du cours n'est exigible des élèves. Le professeur peut, suivant les cas, démontrer en détail un résultat, indiquer l'idée de sa démonstration ou l'admettre. La locution "la démonstration est hors programme" signifie qu'il est demandé d'admettre le résultat.

Enfin, aucun développement ne doit être donné aux notions figurant au programme lorsqu'elles sont uniquement repérées par la locution "définition de..." ; seule cette définition est alors exigible des étudiants.

II PROGRAMME DE LA CLASSE TPC PREMIÈRE ANNÉE

ANALYSE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Le programme d'analyse est organisé autour des concepts fondamentaux de suite et de fonction. La maîtrise du calcul différentiel et intégral à une variable et de ses interventions en géométrie différentielle plane constitue un objectif essentiel.

Le cadre d'étude est bien délimité : suites de nombres réels et de nombres complexes, fonctions définies sur un intervalle de **R** *à valeurs réelles ou complexes, courbes planes, notions élémentaires sur les fonctions de deux variables réelles.*
Le programme combine l'étude globale des suites et des fonctions (opérations, majorations, monotonie, existence d'extremums...) et l'étude de leur comportement local ou asymptotique. En particulier, il convient de mettre en valeur le caractère local des notions de limite, de continuité, de dérivabilité et de tangente.
Il combine aussi l'étude de problèmes qualitatifs (monotonie d'une suite ou d'une fonction, existence de limites, continuité, existence de zéros et d'extremums de fonctions, existence de tangentes...) avec celle des problèmes quantitatifs (majorations, évaluations asymptotiques de suites et de fonctions, approximations de zéros et d'extremums de fonctions, propriétés métriques des courbes planes...).
En analyse, les majorations et les encadrements jouent un rôle essentiel. Tout au long de l'année, il convient donc de dégager les méthodes usuelles d'obtention de majorations et de minorations : opérations sur les inégalités, emploi de la valeur absolue ou du module, emploi du calcul différentiel et intégral (recherche d'extremums, inégalités des accroissements finis et de la moyenne, majorations tayloriennes...). Pour comparer des nombres, des suites ou des fonctions, on utilise systématiquement des inégalités larges (qui sont compatibles avec le passage à la limite), en réservant les inégalités strictes aux cas où elles sont indispensables.

Le programme d'analyse et géométrie différentielle comporte la construction, l'analyse et l'emploi d'algorithmes numériques (approximations de solutions d'équations numériques, approximations d'une intégrale...) et d'algorithmes de calcul formel (dérivation, primitivation...) ; plus largement, le point de vue algorithmique est à prendre en compte pour l'ensemble de ce programme, notamment pour le tracé de courbes.

I. NOMBRES RÉELS ET COMPLEXES, SUITES ET FONCTIONS

Pour l'existence et la recherche de limites de suites ou de fonctions, il convient d'utiliser les résultats établis dans le cours, de préférence au recours direct à la définition.

1- Nombres réels

Il est souvent commode d'identifier la droite euclidienne munie d'une base orthonormale au **R***-espace vectoriel* **R***, ce qui permet d'exploiter le langage de la géométrie pour l'étude des nombres réels.*
La notion de corps totalement ordonné est hors programme.

a) Corps R des nombres réels

Corps **R** des nombres réels ; relation d'ordre, compatibilité avec l'addition, la multiplication.	La construction du corps des nombres réels est hors programme.
Valeur absolue d'un nombre réel, distance de deux points, valeur absolue d'un produit, d'un quotient. Inégalité triangulaire $$\|\|x\| - \|y\|\| \leqslant \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$ Interprétation en termes de distances. Définition des intervalles de **R**.	En particulier, si $\|u\| \leqslant k < 1$, alors $$1 - k \leqslant \|1+u\| \leqslant 1+k.$$ Les étudiants doivent savoir utiliser ces inégalités afin de majorer ou minorer le module d'une somme.
Définition d'un majorant, d'un minorant, du plus grand et du plus petit élément d'une partie. Définition d'une borne supérieure, d'une borne inférieure.	Il convient de préciser, par des exemples simples, la notion de borne supérieure (qu'elle soit atteinte ou non).
Toute partie majorée non vide admet une borne supérieure.	La démonstration de ce théorème est hors programme.

Partie entière d'un nombre réel. Valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} ; approximation par défaut, par excès.

La notion de développement décimal illimité est hors programme.

b) Groupe $\mathbf{R}_+^*$

Définition du groupe multiplicatif $\mathbf{R}_+^*$ des nombres réels strictement positifs. Bijection $x \mapsto \mathrm{e}^x$ (noté également $x \mapsto \exp x$) de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}_+^*$; bijection réciproque $y \mapsto \ln y$.

La continuité, la dérivabilité et les variations des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont supposées connues, ainsi que leurs équations fonctionnelles.

2- Suites de nombres réels

L'objectif est double :
- Étude du comportement global et asymptotique d'une suite donnée, en relation avec la description de phénomènes discrets.
- Description et mise en œuvre d'algorithmes d'approximation d'un nombre réel à l'aide de suites et comparaison de leurs performances, en relation avec l'étude des fonctions et les problèmes de mesure de grandeurs géométriques ou physiques.

En ce qui concerne le comportement global et asymptotique d'une suite, il convient de combiner l'étude de problèmes qualitatifs (monotonie, convergence, divergence...) avec celle de problèmes quantitatifs (majorations, encadrements, vitesse de convergence ou de divergence par comparaison aux suites de référence usuelles...).
Il convient de mettre en valeur, tant au niveau du cours que des problèmes, le fait que pour étudier la convergence d'une suite u_n vers un nombre a, il est utile de se ramener à la convergence de $u_n - a$ vers 0.

Pour la notion de limite d'une suite (u_n) de nombres réels, on adopte les définitions suivantes :
- Étant donné un nombre réel a, on dit que (u_n) admet a pour limite si, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que, pour tout entier n, la relation $n \geqslant N$ implique la relation $|u_n - a| \leqslant \varepsilon$; le nombre a est alors unique, et on le note $\lim_n u_n$. Lorsqu'un tel nombre a existe, on dit que la suite (u_n) est convergente, ou qu'elle admet une limite finie. Dans le cas contraire, on dit que (u_n) est divergente.
- On définit de manière analogue la notion de limite lorsque $a = +\infty$ ou $a = -\infty$; on dit alors que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.
Tout vocabulaire topologique est hors programme.

a) Suites de nombres réels

Suites de nombres réels, opérations, relation d'ordre.
Suites majorées, minorées ; suites bornées.
Suites monotones, strictement monotones.

Pour la présentation du cours, le programme se place dans le cadre des suites indexées par $\mathbf{N}$. On effectue ensuite une brève extension aux autres cas usuels.

b) Limite d'une suite

Limite d'une suite, convergence et divergence.
Lorsque $a \in \mathbf{R}$, la relation $u_n \to a$ équivaut à $u_n - a \to 0$.

Toute suite convergente est bornée.

Toute suite de nombres réels convergeant vers un nombre réel strictement positif est minorée, à partir d'un certain rang, par un nombre réel strictement positif.

Somme de deux suites convergeant vers 0 ; produit d'une suite bornée et d'une suite convergeant vers 0.

Opérations algébriques sur les limites ; compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre.

Si $|u_n| \leqslant \alpha_n$ et $\alpha_n \to 0$, alors $u_n \to 0$.

Si $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$, et si $v_n \to a$ et $w_n \to a$, alors $u_n \to a$.
Si $v_n \leqslant u_n$ et si $v_n \to +\infty$, alors $u_n \to +\infty$.

Toute suite croissante majorée (u_n) converge et

$$\lim_n u_n = \sup_n u_n.$$

Les étudiants doivent connaître et savoir exploiter la notion de suite dichotomique d'intervalles, ainsi que celle de suites adjacentes.

c) Relations de comparaison

Étant donnée une suite (α_n) de nombres réels non nuls, définition d'une suite (u_n) de nombres réels négligeable devant (α_n).

La notation de Landau $u_n = \mathrm{o}(\alpha_n)$ n'est pas exigible des étudiants. Son utilisation doit être très progressive.

Caractérisation à l'aide du quotient $\dfrac{u_n}{\alpha_n}\cdot$

Définition de l'équivalence de deux suites (u_n) et (v_n) de nombres réels non nuls. Équivalent d'un produit, d'un quotient.

Notation $u_n \sim v_n$.

Caractérisation à l'aide du quotient $\dfrac{u_n}{v_n}\cdot$

Si $u_n = \alpha_n + w_n$, où w_n est négligeable devant α_n, alors $u_n \sim \alpha_n$.

Si $u_n \sim v_n$, alors, à partir d'un certain rang, le signe de u_n est égal à celui de v_n.

Comparaison des suites de référence :

$$n \mapsto a^n,\ n \mapsto n^\alpha,\ n \mapsto (\ln n)^\beta,\ n \mapsto n!$$

où $a > 0$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \in \mathbf{R}$.

Les développements asymptotiques sont à étudier sur quelques exemples simples. Toute étude systématique est exclue ; en particulier, la notion générale d'échelle de comparaison est hors programme.

3- Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

L'objectif est double :
- Étude du comportement global et local d'une fonction donnée, en relation avec la description de l'évolution de phénomènes continus.
- Emploi de fonctions pour l'étude de problèmes numériques (majorations d'expressions, problèmes d'optimisation, solutions d'équations numériques, d'équations différentielles, mesures de grandeurs géométriques et physiques...).

En ce qui concerne le comportement global et local (ou asymptotique) d'une fonction, il convient de combiner l'étude de problèmes qualitatifs (monotonie, existence de zéros, existence d'extremums, existence de limites, continuité, dérivabilité...) avec celle de problèmes quantitatifs (majorations, encadrements, comparaison aux fonctions de référence au voisinage d'un point...).
Il convient de mettre en valeur, tant au niveau du cours que des problèmes, le fait que pour établir qu'un nombre b est limite d'une fonction f, il est utile de se ramener au cas $b = 0$.

Dans tout ce chapitre, on considère des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ contenant au moins deux points et à valeurs réelles.

Pour la notion de limite d'une fonction f en un point a (appartenant à I ou extrémité de I), on adopte les définitions suivantes :
- Étant donnés des nombres réels a et b, on dit que f admet b pour limite au point a si, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que, pour tout élément x de I, la relation $|x-a| \leqslant \delta$ implique la relation $|f(x) - b| \leqslant \varepsilon$; le nombre b est alors unique, et on le note $\lim_a f$. Lorsqu'un tel nombre b existe, on dit que f admet une limite finie au point a.
- On définit de manière analogue la notion de limite lorsque $a = +\infty$ ou $a = -\infty$, ou lorsque $b = +\infty$ ou $b = -\infty$.

Dans un souci d'unification, on dit qu'une propriété portant sur une fonction définie sur I est vraie au voisinage de a si elle est vraie sur l'intersection de I avec un intervalle ouvert de centre a lorsque $a \in \mathbf{R}$, avec un intervalle $]c, +\infty[$ lorsque $a = +\infty$ et avec un intervalle $]-\infty, c[$ lorsque $a = -\infty$.
Tout autre vocabulaire topologique est hors programme.

a) Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

Fonctions à valeurs réelles, opérations, relation d'ordre.
Fonctions majorées, minorées ; fonctions bornées.

Définition de $|f|$, f^+ et f^-.

Relations $f = f^+ - f^-$ et $|f| = f^+ + f^-$.

Définition d'un extremum, d'un extremum local.

Notations $\max\limits_{x\in I} f(x)$ et $\max\limits_I f$.

Définition de la borne supérieure (inférieure) d'une fonction.

Notations $\sup\limits_{x\in I} f(x)$ et $\sup\limits_I f$.

Fonctions monotones, strictement monotones ; composition.

Fonctions paires, impaires.

Fonctions T-périodiques.

Définition des fonctions lipschitziennes.

b) Étude locale d'une fonction

Limite d'une fonction f en un point a, continuité en un point.
Lorsque $b \in \mathbf{R}$, la relation $f(x) \to b$ équivaut à la relation $f(x) - b \to 0$.
Lorsque $a \in \mathbf{R}$, la relation $f(x) \to b$ lorsque $x \to a$ équivaut à la relation $f(a+h) \to b$ lorsque $h \to 0$.

Lorsque $a \in I$, dire que f a une limite finie en a équivaut à la continuité de f en ce point. Lorsque $a \notin I$, f a une limite finie en a si et seulement si f se prolonge par continuité en ce point.

Limite à gauche, limite à droite.
Continuité à gauche, continuité à droite.

Les limites à gauche (ou à droite) en a sont définies par restriction de f à $I \cap]-\infty, a[$ (à $I \cap]a, +\infty[$).

Toute fonction admettant une limite finie en un point est bornée au voisinage de ce point.

Toute fonction admettant une limite strictement positive en un point est minorée, au voisinage de ce point, par un nombre réel strictement positif.

Somme de deux fonctions tendant vers 0 en un point a ; produit d'une fonction d'une fonction bornée au voisinage de a par une fonction tendant vers 0 en a.

Opérations algébriques sur les limites ; compatibilité du passage à la limite avec la relation d'ordre.

Si $|f(x)| \leqslant g(x)$ et $g(x) \to 0$, alors $f(x) \to 0$.

Si $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, et si $g(x) \to b$ et $h(x) \to b$, alors $f(x) \to b$.

Limite d'une fonction composée. Image d'une suite convergente.

Existence d'une limite d'une fonction monotone.

Comparaison des bornes (supérieure ou inférieure) et des limites (à gauche ou à droite).

c) Relations de comparaison

Étant donnés un point a (appartenant à I ou extrémité de I) et une fonction φ à valeurs réelles et ne s'annulant pas sur I privé de a, définition d'une fonction f à valeurs réelles négligeable devant φ au voisinage de a.

La notation de Landau $f = \mathrm{o}(\varphi)$ n'est pas exigible des étudiants ; son utilisation doit être très progressive.

Caractérisation à l'aide du quotient $\dfrac{f}{\varphi}\cdot$

Définition de l'équivalence au voisinage de a de deux fonctions f et g à valeurs réelles ne s'annulant pas sur I privé de a. Équivalent d'un produit, d'un quotient.

Notation $f \sim g$.

Caractérisation à l'aide du quotient $\dfrac{f}{g}\cdot$

Si $f = \varphi + h$, où h est négligeable devant φ, alors $f \sim \varphi$.

Si $f \sim g$ alors, au voisinage de a, le signe de $f(x)$ est égal à celui de $g(x)$.

Comparaison, lorsque $x \to +\infty$, des fonctions

$$x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x},\ x \mapsto x^{\beta},\ x \mapsto (\ln x)^{\gamma}.$$

Comparaison, lorsque $x \to 0$, des fonctions

$$x \mapsto x^{\alpha} \text{ et } x \mapsto \big(\ln x\big)^{\beta}.$$

Développement limité à l'ordre n d'une fonction au voisinage d'un point ; opérations algébriques sur les développements limités : somme, produit ; développement limité de $u \mapsto \dfrac{1}{1-u}$, application au quotient.	Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une fonction composée. Aucun résultat général sur ce point n'est exigible. Les développements asymptotiques sont à étudier sur quelques exemples simples. Toute étude systématique est exclue ; en particulier la notion générale d'échelle de comparaison est hors programme.

d) Fonctions continues sur un intervalle

Espace vectoriel $\mathcal{C}(I)$ des fonctions continues sur I et à valeurs réelles. Produit et quotient de fonctions continues. Composée de deux fonctions continues.	Si f est continue, $\|f\|$, f^+, et f^- le sont.
Restriction d'une fonction continue à un intervalle J contenu dans I. Prolongement par continuité en une extrémité de I.	Si f est continue sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$, alors f l'est aussi sur $[a, c]$.
Image d'un intervalle par une fonction continue. Image d'un segment par une fonction continue.	La notion de continuité uniforme est hors programme.
Continuité de la fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone.	Comparaison des représentations graphiques d'une bijection et de la bijection réciproque.

4- Nombres complexes

L'objectif est de consolider et d'approfondir les notions sur les nombres complexes déjà abordées en classe de Terminale. Le programme combine l'étude du corps des nombres complexes et de l'exponentielle complexe avec les applications des nombres complexes aux équations algébriques et à la trigonométrie.

En ce qui concerne les suites et fonctions à valeurs complexes, l'objectif est d'effectuer une brève extension des principales propriétés des suites et fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ et à valeurs réelles.

Il est souvent commode d'identifier $\mathbf{C}$ à l'espace euclidien $\mathbf{R}^2$, ce qui permet d'exploiter le langage de la géométrie pour l'étude des nombres complexes.

a) Corps C des nombres complexes

Corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes, structure de $\mathbf{R}$-algèbre, parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe, conjugaison dans $\mathbf{C}$.	La construction du corps $\mathbf{C}$ est hors programme. Notations $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\bar{z}$.
Isomorphisme canonique de l'espace $\mathbf{R}^2$ sur le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{C}$. Affixe d'un point, d'un vecteur ; image d'un nombre complexe.	Interprétation géométrique des transformations $z \mapsto \bar{z}$, $z \mapsto z + b$.
Module d'un nombre complexe, module d'un produit, d'un quotient. Inégalité triangulaire. Interprétation en termes de distances. Définition du groupe multiplicatif $\mathbf{U}$ des nombres complexes de module 1.	Notation $\|z\|$; relation $\|z\|^2 = z\bar{z}$. Interprétation géométrique de $\|z\|$, de $\|z - a\|$; disque ouvert (fermé) de centre a. Si $\|u\| \leqslant k < 1$, alors $1 - k \leqslant \|1 + u\| \leqslant 1 + k.$

b) Suites et fonctions à valeurs complexes

Brève extension des notions et propriétés suivantes : - convergence et divergence d'une suite ; opérations sur les suites convergentes ;	Par identification canonique de $\mathbf{C}$ à $\mathbf{R}^2$, les notions de ce paragraphe s'appliquent aux suites et aux fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbf{R}^2$.
- limite d'une fonction en un point ; continuité sur un intervalle.	Notations $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$, $\bar{f}$, $\|f\|$.

c) Groupe $\mathbf{U}$ des nombres complexes de module 1

Définition de $e^{i\theta}$, relation $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}\,e^{i\theta'}$; formule de Moivre. Relations d'Euler.
L'application $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est une application surjective de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{U}$. En outre, la relation $e^{i\theta} = 1$ équivaut à la relation $\theta \in 2\pi\mathbf{Z}$.

Par définition, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ où $\theta \in \mathbf{R}$. La continuité, la dérivabilité et les variations des fonctions cosinus, sinus et tangente sont supposées connues, ainsi que leurs formules d'addition. Les étudiants doivent savoir exprimer $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ et $e^{i\theta}$ à l'aide de $\tan\dfrac{\theta}{2}$ et relier ces formules à la représentation paramétrique rationnelle du cercle trigonométrique privé de -1.

Arguments d'un nombre complexe. Écriture d'un nombre complexe $z \neq 0$ sous la forme $\rho\, e^{i\theta}$ où $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbf{R}$ (forme trigonométrique).
Interprétation géométrique des transformations $z \mapsto az$.

Arguments d'un produit, d'un quotient.

Racines n-ièmes de l'unité. Résolution de l'équation $z^n = a$.

d) Exponentielle complexe

Définition de l'exponentielle d'un nombre complexe :

$$e^z = e^x\,e^{iy} \quad \text{où} \quad z = x + iy.$$

Relation $e^{z+z'} = e^z\,e^{z'}$.

L'application $z \mapsto e^z$ (également notée $z \mapsto \exp z$) est une application surjective de $\mathbf{C}$ sur $\mathbf{C}^*$. En outre, la relation $e^z = 1$ équivaut à la relation $z \in 2i\pi\mathbf{Z}$.

Module et arguments de e^z ; résolution de l'équation $e^z = a$.

La notion de logarithme complexe est hors programme.

Travaux pratiques

§ Exemples d'étude du comportement global et asymptotique de suites de nombres réels, de nombres complexes.

Il convient d'entraîner les étudiants à exploiter la comparaison aux suites de référence et à classer des ordres de grandeur, notamment pour évaluer le poids respectif des termes d'une somme.

§ Exemples d'étude de suites de nombres réels définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et d'emploi d'une telle suite pour l'approximation d'un point fixe a de f.

Il convient de mettre en valeur le rôle des variations de f et les interprétations graphiques. L'étude est à mener sur des exemples ; aucun énoncé général n'est exigible des étudiants.
Pour étudier la vitesse de convergence de u_n vers a, les étudiants doivent savoir exploiter le comportement local de f au voisinage de a et, notamment, une inégalité du type lipschitzien $|f(x) - f(a)| \leqslant k|x - a|$ où $0 \leqslant k < 1$, ou du type $|f(x) - f(a)| \leqslant \lambda|x - a|^2$.

Exemples d'étude du comportement local et asymptotique de fonctions d'une variable réelle et d'emploi de développements limités.

L'étude de singularités et la recherche de développements limités ne sont pas des objectifs en soi, et tout excès de technicité sur ces points est à éviter.

Exemples d'étude du comportement global de fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles : étude des variations, des zéros et du signe.

§ Exemples d'emploi des nombres complexes en algèbre (polynômes, équations algébriques...).

§ Exemples d'emploi des nombres complexes en trigonométrie.

Les étudiants doivent savoir linéariser un polynôme trigonométrique, exprimer une somme de deux cosinus ou de deux sinus sous forme de produit, connaître les expressions de $\sin\theta$, $\cos\theta$, $1+\cos\theta$ et $1-\cos\theta$ à l'aide de $\theta/2$, ainsi que la relation $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 2\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$ et son interprétation géométrique.

II. CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

Le programme est organisé autour de trois axes :
- Dérivation en un point et sur un intervalle.
- Intégration sur un segment des fonctions continues par morceaux.
- Théorème fondamental reliant l'intégration et la dérivation ; exploitation de ce théorème pour le calcul différentiel et intégral, et notamment pour les formules de Taylor.
Aussi bien pour l'étude locale que pour l'étude globale des fonctions, le programme combine de manière indissociable les outils du calcul différentiel et du calcul intégral.

L'étude générale de la dérivation et de l'intégration doit être illustrée par de nombreux exemples portant sur les fonctions usuelles (qui, par commodité de rédaction, ne figurent qu'au chapitre 6) et celles qui s'en déduisent.

Les fonctions considérées dans cette partie sont définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ contenant au moins deux points et, dans les trois premiers chapitres, sont à valeurs réelles.

1- Dérivation des fonctions à valeurs réelles

a) Dérivée en un point, fonction dérivée

Dérivabilité en un point : dérivée, dérivée à gauche, à droite.

Extremums locaux des fonctions dérivables.

Les étudiants doivent connaître et savoir exploiter l'interprétation graphique et l'interprétation cinématique de la notion de dérivée en un point.

Dérivabilité sur un intervalle, fonction dérivée. Opérations sur les dérivées : linéarité, produit, quotient, fonctions composées, fonctions réciproques.

Notations f', $\mathrm{D}f$, $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

Espace vectoriel $\mathcal{C}^k(I)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, où $0 \leqslant k \leqslant +\infty$. Dérivée n-ième d'un produit (formule de Leibniz).

Notations $f^{(k)}$, $D^k f$, $\dfrac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}$.

b) Étude globale des fonctions dérivables

Théorème de Rolle, égalité des accroissements finis.

Inégalité des accroissements finis :
- si $m \leqslant f' \leqslant M$, alors $m(b-a) \leqslant f(b)-f(a) \leqslant M(b-a)$;
- si $|f'| \leqslant k$, alors f est k-lipschitzienne.

Caractérisation des fonctions constantes, monotones et strictement monotones parmi les fonctions dérivables.

Pour le théorème de Rolle, l'égalité et l'inégalité des accroissements finis, ainsi que pour la caractérisation des fonctions monotones, on suppose f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

Les étudiants doivent connaître l'interprétation graphique et cinématique de ces résultats.

Si f est continue sur $[a,b]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b]$ et si f' a une limite finie en a, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

Brève extension au cas d'une limite infinie.

2- Intégration sur un segment des fonctions à valeurs réelles

Le programme se limite à l'intégration des fonctions continues par morceaux sur un segment.
En vue de l'enseignement des autres disciplines scientifiques, il convient de définir la convergence absolue de l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle quelconque, mais, en mathématiques, aucune connaissance spécifique sur ce point n'est exigible des étudiants.

a) Fonctions continues par morceaux

Définition d'une fonction φ en escalier sur $[a,b]$.

Espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur un segment. Produit de fonctions continues par morceaux.

b) Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment. Notations $\int_I f$, $\int_{[a,b]} f$. Linéarité.
Croissance ; inégalité $|\int_I f| \leqslant \int_I |f|$.
Additivité par rapport à l'intervalle d'intégration.
Invariance de l'intégrale par translation.

Pour introduire la notion d'intégrale d'une fonction à valeurs positives, il convient de s'appuyer sur la notion d'aire. Aucune difficulté théorique ne doit être soulevée sur la notion d'aire. Les propriétés de l'intégrale sont admises.

Valeur moyenne d'une fonction.
Inégalité de la moyenne

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant (b-a) \sup_{[a,b]} |f|.$$

Une fonction f continue et à valeurs positives sur un segment est nulle si et seulement si son intégrale est nulle.

Approximation de l'intégrale d'une fonction f continue sur $[a,b]$ par les sommes de Riemann

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(a_j)$$

où $(a_0, \dots, a_n)$ est une subdivision à pas constant.

Définition de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, où a et b appartiennent à I. Linéarité. Inégalité de la moyenne. Relation de Chasles.

3- Intégration et dérivation

a) Primitives et intégrales d'une fonction continue

Définition d'une primitive d'une fonction continue.
Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.
Théorème fondamental :

- étant donnés une fonction f continue sur un intervalle I et un point $a \in I$, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a ;

- pour toute primitive h de f sur I,

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = h(x) - h(a).$$

Pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Intégration par parties pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Changement de variable : étant données une fonction f continue sur I et une fonction φ à valeurs dans I et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$,

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Il convient de mettre en valeur l'intérêt de changements de variable affines, notamment pour exploiter la périodicité et les symétries, ou pour se ramener, par paramétrage du segment $[a,b]$, au cas où l'intervalle d'intégration est $[0,1]$ ou $[-1,1]$.

b) Formules de Taylor

Pour une fonction de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ sur I, formule de Taylor à l'ordre p en un point a de I.
Expression intégrale du reste.
Majoration du reste : inégalité de Taylor-Lagrange.

Relation $f(x) = T_p(x) + R_p(x)$, où

$$T_p(x) = \sum_{n=0}^{p} \frac{(x-a)^n}{n!} D^n f(a).$$

Existence d'un développement limité à l'ordre p pour une fonction de classe $\mathcal{C}^p$: formule de Taylor-Young.

c) Approximation d'une intégrale par la méthode des trapèzes

Étant donnée une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ et une subdivision $S = (a_0, \ldots, a_n)$ de $[a,b]$ à pas constant, approximation de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par

$$I_n(f) = \frac{b-a}{2n} \sum_{j=0}^{n-1} \big[f(a_j) + f(a_{j+1})\big].$$

Majoration

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - I_n(f) \right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2}\, M_2(f).$$

Cette méthode consiste à approcher f, sur chaque intervalle $[\alpha, \beta]$ de la subdivision S, par la fonction affine φ telle que $\varphi(\alpha) = f(\alpha)$ et $\varphi(\beta) = f(\beta)$, et à exploiter la majoration suivante, valable pour tout élément t de $[\alpha, \beta]$,

$$|f(t) - \varphi(t)| \leqslant \frac{(t-a)(b-t)}{2}\, M_2(f).$$

Algorithme d'approximation d'une intégrale par la méthode des trapèzes.

Il convient de souligner l'intérêt des subdivisions dichotomiques.

4- Dérivation et intégration des fonctions à valeurs complexes

L'objectif est d'effectuer une brève extension des notions et propriétés suivantes, vues pour les fonctions à valeurs réelles, aux fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs complexes.

Par identification de $\mathbf{C}$ à $\mathbf{R}^2$, les notions de ce chapitre s'appliquent aux fonctions d'une variable réelle et à valeurs dans $\mathbf{R}^2$.

Brève extension des notions et propriétés suivantes :
- dérivabilité en un point, sur un intervalle ; opérations sur les dérivées ;
- intégrale d'une fonction continue par morceaux ;
- extension du théorème fondamental reliant l'intégrale et les primitives ;
- intégration par parties, changement de variable.

5- Courbes planes paramétrées

Dans ce chapitre, on considère des fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbf{R}^2$, de classe $\mathcal{C}^k$, où, $1 \leqslant k \leqslant +\infty$.

L'objectif est d'exploiter, par identification de $\mathbf{C}$ au plan euclidien $\mathbf{R}^2$, les résultats obtenus sur les fonctions à valeurs complexes pour l'étude cinématique et géométrique des courbes planes.

Le programme se place dans le cadre des courbes paramétrées (point de vue cinématique).

L'étude des courbes paramétrées fait l'objet d'un approfondissement au chapitre IV.1.

a) Courbes paramétrées

Courbes paramétrées (ou arcs paramétrés) de classe $\mathcal{C}^k$; interprétation cinématique : mouvement, vitesse, accélération.

Étant données deux fonctions f et g de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans $\mathbf{R}^2$, dérivation de $(f|g)$, de $\|f\|$ et de $\mathrm{Det}\,(f,g)$.

En vue de l'enseignement de la mécanique, il convient de donner la caractérisation d'un mouvement uniforme, d'un mouvement rectiligne, d'un mouvement à accélération centrale. En mathématiques, aucune connaissance spécifique sur ces points n'est exigible des étudiants.

Trajectoire d'un mouvement, orientation ; point régulier, birégulier.

b) Étude locale d'une courbe paramétrée

Définition de la tangente en un point régulier ; vecteur unitaire $\overrightarrow{T}$ de la tangente à un arc orienté.

L'étude de points non biréguliers (rebroussements, inflexions) porte seulement sur des exemples ; aucun énoncé général n'est exigible des étudiants.

Position locale de la courbe par rapport à l'une de ses tangentes en un point birégulier (concavité).

6- Fonctions usuelles

a) Fonctions exponentielles, logarithmes, puissances

Fonctions exponentielles réelles, fonctions logarithmes. Fonctions puissances.
Fonctions hyperboliques ch, sh et th.

Les étudiants doivent connaître les dérivées, les variations et les représentations graphiques de ces fonctions.

En ce qui concerne la trigonométrie hyperbolique, la seule connaissance exigible des étudiants est la relation $\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t = 1$ et son interprétation géométrique. Les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme.

b) Fonctions circulaires

Fonctions circulaires cos, sin et tan.
Définition et dérivation des fonctions circulaires réciproques Arccos, Arcsin et Arctan.

Les étudiants doivent connaître les dérivées, les variations et les représentations graphiques des fonctions circulaires et des fonctions circulaires réciproques. Aucune autre connaissance spécifique sur les fonctions circulaires réciproques n'est exigible des étudiants.

c) Fonction exponentielle complexe

Dérivation de $t \mapsto \mathrm{e}^{at}$ où $a \in \mathbf{C}$; dérivation de $t \mapsto \mathrm{e}^{\varphi(t)}$, où φ est à valeurs complexes.

d) Primitives des fonctions usuelles

Primitives de $t \mapsto (t-a)^n$, $a \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Lorsque $n = -1$ on se ramène à l'intégration de la partie réelle et de la partie imaginaire ; la notion de fonction logarithme complexe est hors programme.

Primitives de $t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t} P(t)$ où $\alpha \in \mathbf{C}$ et $P \in \mathbf{C}[X]$.
Tableau des primitives des fonctions usuelles.

e) Développements limités des fonctions usuelles

Développement limité à l'origine des fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{at}$, $a \in \mathbf{C}$, $t \mapsto (1+t)^a$, $a \in \mathbf{R}$.

Les étudiants doivent savoir en déduire les autres développements limités usuels.

f) Équations différentielles à coefficients constants

Caractérisation de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{at}$ ($a \in \mathbf{C}$) par l'équation différentielle $y' = a\,y$ et la condition initiale $y(0) = 1$.

Équations $ay' + by = f(x)$ et $ay'' + by' + cy = f(x)$, où a, b, c sont des nombres complexes, a non nul, et f une somme de fonctions du type $x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x} P(x)$, où $\alpha \in \mathbf{C}$ et $P \in \mathbf{C}[X]$.

Existence et unicité de la solution satisfaisant à une condition initiale donnée. Structure de l'espace vectoriel des solutions de l'équation sans second membre associée.

7- Notions sur les fonctions de deux variables réelles

Cette partie constitue une première prise de contact avec les fonctions de deux variables réelles. Les notions sont données en vue de l'enseignement des autres disciplines scientifiques :

- Dérivées partielles, dérivée d'une fonction composée ; recherche d'extremums. Coordonnées polaires.
- Intégrales doubles ; exemples d'applications aux calculs d'aires planes et de masses.
- Champs de vecteurs ; gradient, divergence, rotationnel ; circulation d'un champ de vecteurs, intégrale curviligne, potentiel scalaire.

En mathématiques, aucune connaissance sur ces différents points n'est exigible des étudiants.

Travaux pratiques

Exemples d'emploi du calcul différentiel et intégral pour l'étude globale des fonctions : variations, recherche des zéros et du signe d'une fonction, obtention de majorations et minorations de suites et de fonctions, recherche d'extremums.	
§ Exemples d'algorithmes d'approximation d'une solution d'une équation numérique et de comparaison de leurs performances.	Les étudiants doivent connaître les méthodes de dichotomie, d'itération et de Newton et savoir comparer leurs performances sur les exemples étudiés.
§ Exemples de calcul de primitives et d'intégrales.	Les étudiants doivent savoir calculer une primitive d'une fonction rationnelle n'ayant que des pôles simples. En dehors de ce cas, des indications sur la méthode à suivre doivent être fournies.
§ Exemples d'algorithmes de calcul approché d'intégrales et de comparaison de leurs performances.	La démarche consiste à subdiviser l'intervalle d'intégration et à approcher, sur chaque sous-intervalle, la fonction à intégrer par une fonction polynomiale.
§ Exemples d'étude et de construction de courbes paramétrées	Toute étude de point singulier ou de branche infinie doit comporter des indications sur la méthode à suive. Aucune connaissance spécifique sur ces points n'est exigible des étudiants.
Exemples d'étude d'équations différentielles à coefficients constants.	Il convient d'exploiter notamment des problèmes issus des autres disciplines scientifiques.

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

Le programme d'algèbre et géométrie est organisé autour des concepts fondamentaux d'espace vectoriel et d'application linéaire, et de leurs interventions en algèbre, en analyse et en géométrie. La maîtrise de l'algèbre linéaire élémentaire en dimension finie constitue un objectif essentiel.

Le cadre d'étude est bien délimité : brève mise en place des principaux concepts d'espace vectoriel, d'application linéaire et de sous-espaces vectoriels supplémentaires, sous leur forme générale, en vue notamment des interventions en analyse ; en dimension finie, étude des concepts de base, de dimension et de rang, mise en place du calcul matriciel ; interventions de l'algèbre linéaire en géométrie euclidienne.

La maîtrise de l'articulation entre le point de vue géométrique (vecteurs et points) et le point de vue matriciel constitue un objectif majeur. Le programme combine, de façon indissociable, la mise en place des concepts de l'algèbre linéaire avec celle des problèmes linéaires (indépendance linéaire, équations linéaires…).

Pour les groupes, les anneaux et les corps, le programme se limite à quelques définitions de base et aux exemples usuels ; toute étude générale de ces structures est hors programme.

Le programme d'algèbre et géométrie comporte la construction, l'analyse et l'emploi d'algorithmes numériques (division euclidienne dans $\mathbf{Z}$*, opérations élémentaires sur les matrices en algèbre linéaire…) et de calcul formel (polynômes et fractions rationnelles…) ; plus largement, le point de vue algorithmique est à prendre en compte pour l'ensemble de ce programme.*

I. NOMBRES ET STRUCTURES ALGÉBRIQUES USUELLES

1- Ensembles, applications

L'objectif est d'acquérir le vocabulaire usuel sur les ensembles et les applications. Toute étude systématique, a fortiori toute axiomatique, de la théorie des ensembles est exclue.
Le programme se limite strictement aux notions de base figurant ci-dessous. Ces notions doivent être acquises progressivement par les étudiants au cours de l'année, au fur et à mesure des exemples rencontrés dans les différents chapitres d'algèbre, d'analyse et de géométrie. Elles ne doivent pas faire l'objet d'une étude exhaustive bloquée en début d'année.

a) Ensembles, opérations sur les parties

Ensembles, appartenance, inclusion. Ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E. Opérations sur les parties : intersection, réunion, complémentaire. Produit de deux ensembles.

Les éléments x d'un ensemble E satisfaisant à une relation $\mathcal{R}(x)$ constituent une partie de E, ce qui permet d'interpréter en termes ensemblistes l'implication, la conjonction et la disjonction de deux relations, ainsi que la négation d'une relation.

b) Applications, lois de composition

Une application f de E dans (vers) F est définie par son ensemble de départ E, son ensemble d'arrivée F et son graphe G.
Composée de deux applications, application identique. Restriction et prolongements d'une application.
Équations, applications injectives, surjectives, bijectives. Application réciproque d'une bijection.

Notations $E \xrightarrow{f} F$, $f : E \to F$, $x \mapsto f(x)$, la première étant très commode, notamment pour la composition des applications.
Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application. La notion de correspondance entre deux ensembles est hors programme.

Définition d'une loi de composition interne. Associativité, commutativité, élément neutre. Définition des éléments inversibles pour une loi associative admettant un élément neutre.

Notations additive et multiplicative d'une loi de composition.

2- Nombres entiers naturels, ensembles finis, dénombrements

En ce qui concerne les nombres entiers naturels et les ensembles finis, l'objectif principal est d'entraîner les étudiants à pratiquer le raisonnement par récurrence. Les propriétés de l'addition, de la multiplication et de la relation d'ordre dans $\mathbf{N}$ *sont supposées connues ; toute construction et toute axiomatique de* $\mathbf{N}$ *sont hors programme. Aucune difficulté ne doit être soulevée sur la notion d'ensemble fini.*

En ce qui concerne la combinatoire, le programme se limite strictement aux exemples fondamentaux indiqués ci-dessous.

a) Nombres entiers naturels

Propriétés fondamentales de l'ensemble $\mathbf{N}$ des nombres entiers naturels. Toute partie non vide a un plus petit élément ; principe de récurrence. Toute partie majorée non vide a un plus grand élément.

Les étudiants doivent savoir pratiquer le raisonnement par récurrence simple ou avec prédécesseurs.

Suites d'éléments d'un ensemble E (indexées par une partie de $\mathbf{N}$). Suite définie par une relation de récurrence et une condition initiale.

On admet qu'étant donnés une application f de E dans E et un élément a de E, il existe une suite (u_n) et une seule d'éléments de E satisfaisant à la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et à la condition initiale $u_0 = a$.

Exemples d'utilisation des notations $a_1 + a_2 + \ldots + a_p + \ldots + a_n$, $a_1 a_2 \ldots a_p \ldots a_n$, $\displaystyle\sum_{1 \leqslant p \leqslant n} a_p$, $\displaystyle\prod_{1 \leqslant p \leqslant n} a_p$.

Suites arithmétiques, suites géométriques. Notations na et a^n.

Symbole $n!$ (on convient que $0! = 1$).

b) Opérations sur les ensembles finis, dénombrements

Cardinal d'une réunion finie de parties finies disjointes.
Cardinal d'un ensemble produit :

$$\operatorname{Card}(E \times F) = \operatorname{Card} E \cdot \operatorname{Card} F.$$

Les étudiants doivent connaître la relation $\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card}(A \cap B)$.

L'ensemble des applications de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ a pour cardinal n^p.
Cardinal A_n^p de l'ensemble des injections de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$; arrangements. Cas des bijections ; permutations.

Tout développement sur ces notions est exclu.

Cardinal $\dbinom{n}{p}$, ou C_n^p, de l'ensemble des parties de $[\![1, n]\!]$ ayant p éléments ; combinaisons. Relations

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1} = \frac{n-p+1}{p}\binom{n}{p-1}.$$

Les étudiants doivent connaître les relations

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}, \qquad \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n,$$

$\dbinom{n}{p} = \dbinom{n-1}{p} + \dbinom{n-1}{p-1}$ (triangle de Pascal)

ainsi que leur interprétation ensembliste.

3- Structures algébriques usuelles

L'objectif est d'acquérir le vocabulaire élémentaire sur les structures algébriques usuelles suivantes : groupes, anneaux et corps, espaces vectoriels, algèbres. Toute étude des structures algébriques générales est hors programme.
Le programme se limite strictement aux notions de base indiquées ci-dessous. Ces notions doivent être acquises progressivement par les étudiants au cours de l'année, au fur et à mesure des exemples rencontrés dans les différents chapitres d'algèbre, d'analyse et de géométrie. Elles ne doivent pas faire l'objet d'une étude exhaustive bloquée en début d'année.
Vu l'importance capitale de l'algèbre linéaire, le programme comporte l'étude des concepts d'espace vectoriel, d'application linéaire et d'algèbre ; cette étude fait l'objet d'un approfondissement dans le cadre des espaces vectoriels de dimension finie (cf. parties II et III).
En revanche, pour les groupes, les anneaux et les corps, le programme se limite à quelques définitions élémentaires et aux exemples usuels. La construction de $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ *et* $\mathbf{C}$ *est hors programme.*

En algèbre linéaire, le programme se limite au cas où le corps de base est $\mathbf{K}$, *où* $\mathbf{K}$ *désigne* $\mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$.

a) Groupes

Définition d'un groupe, d'un sous-groupe, d'un morphisme de groupes, d'un isomorphisme.
Groupe additif $\mathbf{Z}$ des nombres entiers.

Ces notions doivent être illustrées par des exemples issus des ensembles de nombres, notamment $\mathbf{Z}$, $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$, de l'algèbre linéaire et de la géométrie.

b) Anneaux et corps

Définition d'un anneau (ayant un élément unité). Distributivité du produit par rapport au symbole sommatoire $\sum$.
Définition d'un corps (commutatif).

Ces notions doivent être illustrées par des exemples issus :
- des ensembles de nombres $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$;
- des polynômes et fractions rationnelles.

Anneau $\mathbf{Z}$ des nombres entiers, corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels.

Multiples et diviseurs d'un entier. Division euclidienne dans $\mathbf{Z}$, algorithme de la division euclidienne.
Définition des nombres premiers. Existence et unicité de la décomposition d'un entier strictement positif en produit de facteurs premiers.

Aucune question d'artihmétique ne peut être posée aux étudiants.
La démonstration de l'existence et de l'unicité de la décomposition en facteurs premiers est hors programme.

Calculs dans un anneau commutatif et dans un corps. Formule du binôme. Relation

$$x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k-1}y^k.$$

Somme des n premiers termes d'une suite géométrique.

Brève extension au cas d'éléments qui commutent.

c) Espaces vectoriels

Définition d'un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$, définition d'un sous-espace vectoriel, d'une application linéaire, d'une forme linéaire. Composée de deux applications linéaires. Définition d'un isomorphisme, d'un endomorphisme, d'un automorphisme.
L'application réciproque d'une application linéaire bijective est linéaire.
Espace vectoriel $\mathcal{F}(X, F)$ des applications d'un ensemble X dans un espace vectoriel F. Espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F ; linéarité des applications $v \mapsto v \circ u$ et $u \mapsto v \circ u$.

Ces notions doivent être illustrées par de nombreux exemples, et notamment :
- l'espace vectoriel $\mathbf{K}^n$;
- l'espace vectoriel $\mathcal{F}(X, \mathbf{K})$ des applications d'un ensemble X dans $\mathbf{K}$;
- les espaces vectoriels de suites et de fonctions ;
- l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ des matrices à coefficients dans $\mathbf{K}$ à n lignes et p colonnes.

Équations linéaires ; noyau et image d'une application linéaire. Description de l'ensemble des solutions de $u(x) = b$.

Définition des combinaisons linéaires de p vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_p$ d'un espace vectoriel ; image par une application linéaire d'une combinaison linéaire. Définition des relations linéaires entre p vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_p$ d'un espace vectoriel.

On traite d'abord le cas d'une famille $(x_1, \ldots, x_p)$, puis on étend brièvement ces notions au cas des familles finies $(x_i)_{i \in I}$. Le cas des familles indexées par un ensemble infini est hors programme.

Intersection de sous-espaces vectoriels.

Description du sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs.

Somme $F+G$ de deux sous-espaces vectoriels. Sous-espaces supplémentaires, notation $E = F \oplus G$. Projecteurs associés.

La notion générale de somme directe est hors programme.

d) Algèbres

Définition d'une $\mathbf{K}$-algèbre associative unitaire ; une telle algèbre est munie d'une structure d'anneau. Définition d'une sous-algèbre.

Algèbre $\mathcal{F}(X, \mathbf{K})$ des applications d'un ensemble X dans le corps $\mathbf{K}$.
Algèbre $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes d'un espace vectoriel E ; homothéties.

Ces notions doivent être illustrées par des exemples, et notamment :
- la $\mathbf{R}$-algèbre $\mathbf{C}$ des nombres complexes ;
- l'algèbre $\mathbf{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$;
- les algèbres de suites et de fonctions ;
- l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ des matrices à coefficients dans $\mathbf{K}$ à n lignes et n colonnes.

L'étude générale des algèbres est hors programme.

4- Polynômes et fractions rationnelles

L'objectif est d'étudier, par des méthodes élémentaires, les propriétés de base des polynômes et des fractions rationnelles, et de les exploiter pour la résolution de problèmes portant sur les équations algébriques et les fonctions numériques.

Le programme se limite au cas où le corps de base est $\mathbf{K}$, où $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

On pourra confondre les notions de polynôme et de fonction polynomiale.

a) Algèbre $\mathbf{K}[X]$ et corps $\mathbf{K}(X)$

Algèbre $\mathbf{K}[X]$ des polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbf{K}$.
Degré d'un polynôme non nul, coefficient dominant, polynôme unitaire (ou normalisé). Degré d'un produit, d'une somme ; les polynômes de degré inférieur ou égal à p constituent un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$.
Corps $\mathbf{K}(X)$ des fractions rationnelles.

Notation $a_0 + a_1 X + \ldots + a_p X^p$.

La notation $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ n'est pas exigible des étudiants.

Aucune connaissance sur la construction de $\mathbf{K}[X]$ et de $\mathbf{K}(X)$ n'est exigible des étudiants.

Multiples et diviseurs d'un polynôme, polynômes associés. Division euclidienne dans $\mathbf{K}[X]$, algorithme de la division euclidienne.

b) Fonctions polynomiales et rationnelles

Fonction polynomiale associée à un polynôme. Équations algébriques. Zéros (ou racines) d'un polynôme ; ordre de multiplicité.

Reste de la division euclidienne d'un polynôme P par $X - a$; caractérisation des zéros de P.

Algorithme de Horner pour le calcul des valeurs d'une fonction polynomiale.

Fonction rationnelle associée à une fraction rationnelle. Zéros et pôles d'une fraction rationnelle ; ordre de multiplicité.

Théorème de d'Alembert-Gauss. Description des polynômes irréductibles de $\mathbf{C}[X]$ et de $\mathbf{R}[X]$.

La démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss est hors programme.

Décomposition d'un polynôme en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbf{C}$ et sur $\mathbf{R}$.
Décomposition dans $\mathbf{C}[X]$ de $X^n - 1$.

Somme et produit des racines d'un polynôme à coefficients complexes.

Définition du polynôme dérivé. Linéarité de la dérivation, dérivée d'un produit. Dérivées successives, dérivée n-ième d'un produit (formule de Leibniz). Formule de Taylor, application à la recherche de l'ordre de multiplicité d'un zéro.

Les étudiants doivent connaître les relations

$$P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(X-a)^n}{n!} P^{(n)}(a),$$

$$P(a+X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{X^n}{n!} P^{(n)}(a).$$

c) Étude locale d'une fraction rationnelle

Existence et unicité de la partie entière d'une fraction rationnelle R ; existence et unicité de la partie polaire de R relative à un pôle a. Lorsque a est un pôle simple de R, expressions de la partie polaire relative à ce pôle.

La démonstration de l'existence et de l'unicité de la partie polaire est hors programme.
Des indications sur la méthode à suivre doivent être fournies pour des pôles multiples. La division des polynômes suivant les puissances croissantes est hors programme.

Lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, toute fraction rationnelle R est égale à la somme de sa partie entière et de ses parties polaires. Existence et unicité de la décomposition de R en éléments simples.

Aucune connaissance spécifique sur la décomposition en éléments simples sur $\mathbf{R}$ n'est exigible des étudiants.

Travaux pratiques

Exemples de recherche de polynômes satisfaisant à des conditions données (interpolation, équations différentielles...).

Aucune connaissance spécifique sur les méthodes d'interpolation n'est exigible des étudiants.

§ Exemples d'obtention de la décomposition d'un polynôme en produit de facteurs irréductibles.

§ Exemples d'étude d'équations algébriques à coefficients réels ou complexes.

En dehors du cas de $z^n = a$, aucune connaissance spécifique sur les équations d'ordre supérieur ou égal à 3 n'est exigible des étudiants.

§ Pratique de la décomposition en éléments simples dans $\mathbf{C}(X)$ d'une fraction rationnelle n'ayant que des pôles simples.

En dehors de ce cas, des indications sur la méthode à suivre doivent être fournies. L'obtention de décompositions en éléments simples n'est pas un objectif en soi ; tout excès de technicité sur ce point est à éviter.

II. ALGÈBRE LINÉAIRE ET GÉOMÉTRIE AFFINE

L'objectif est double :
- Acquérir les notions de base sur les espaces vectoriels de dimension finie (indépendance linéaire, bases, dimension, sous-espaces vectoriels supplémentaires et projecteurs, rang), le calcul matriciel et la géométrie du plan et de l'espace (droites, plans, barycentres).
- Maîtriser les relations entre le point de vue géométrique (vecteurs et applications linéaires) et le point de vue matriciel.
Il convient d'étudier conjointement l'algèbre linéaire et la géométrie du plan et de l'espace et, dans les deux cas, d'illustrer les notions et les résultats par de nombreuses figures.

Dans toute cette partie, les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie et le corps de base est **K**, *où* **K** *désigne* **R** *ou* **C**.

1- Espaces vectoriels de dimension finie

L'étude des espaces vectoriels et des applications linéaires est à mener de front avec celle du calcul matriciel. La théorie de la dualité, et notamment la notion d'orthogonalité, est hors programme.

a) Familles libres, familles génératrices, bases

Définition d'une famille libre, d'une famille liée, d'une famille génératrice, d'une base ; coordonnées (ou composantes) d'un vecteur dans une base. Base canonique de $\mathbf{K}^n$.
Étant donnés un espace vectoriel E muni d'une base $(e_1, \dots, e_p)$ et une famille $(f_1, \dots, f_p)$ de vecteurs d'un espace vectoriel F, il existe une application linéaire u et une seule de E dans F telle que $u(e_j) = f_j$.

La donnée d'une famille de p vecteurs $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ d'un **K**-espace vectoriel E détermine une application linéaire de $\mathbf{K}^p$ dans E ; noyau et image de cette application ; caractérisation des bases de E, des familles génératrices, des familles libres.

b) Dimension d'un espace vectoriel

Définition d'un espace vectoriel de dimension finie (espace vectoriel admettant une famille génératrice finie). Théorème de la base incomplète, existence de bases.

Toutes les bases d'un espace vectoriel E de dimension finie sont finies et ont le même nombre d'éléments, appelé dimension de E. On convient que l'espace vectoriel réduit à $\{0\}$ est de dimension nulle.
Tout espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbf{K}^n$; deux espaces vectoriels de dimension finie E et F sont isomorphes si et seulement si $\dim E = \dim F$.

Étant donnée une famille S de vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n :
- si S est libre, alors $p \leqslant n$, avec égalité si et seulement si S est une base ;
- si S est génératrice, alors $p \geqslant n$, avec égalité si et seulement si S est une base.

Étant donnés un espace vectoriel E muni d'une base $B = (e_j)$ et un espace vectoriel F muni d'une base $C = (f_i)$, une application linéaire u de E dans F et un vecteur x de E, expression des coordonnées de $y = u(x)$ dans C en fonction des coordonnées de x dans B.

Étant donnée une forme linéaire φ sur E, expression de $\varphi(x)$ en fonction des coordonnées de x dans B.

c) Dimension d'un sous-espace vectoriel

Tout sous-espace vectoriel E' d'un espace vectoriel de dimension finie E est de dimension finie et $\dim E' \leqslant \dim E$, avec égalité si et seulement si $E' = E$. Rang d'une famille de vecteurs.

Existence de sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un sous-espace vectoriel donné ; dimension d'un supplémentaire.

Les étudiants doivent connaître la relation $\dim(E + F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F)$.

d) Rang d'une application linéaire

Pour toute application linéaire u de E dans F :

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Im} u.$$

Rang d'une application linéaire, caractérisation des isomorphismes.

Caractérisation des éléments inversibles de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$. Définition du groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$; homothéties de rapport non nul, symétries.

L'étude générale du groupe linéaire est hors programme.

2- Calcul matriciel

Le calcul matriciel présente deux aspects qu'il convient de mettre en valeur :
- Calcul sur des tableaux de nombres, interprétés en termes d'applications linéaires de $\mathbf{K}^p$ dans $\mathbf{K}^n$ munis de leurs bases canoniques.
- Expression dans des bases d'une application linéaire d'un espace vectoriel dans un autre.
Un des objectifs importants est d'interpréter matriciellement un changement de base dans un espace vectoriel, puis d'étudier l'effet d'un changement de base(s) sur la matrice associée à un endomorphisme (à une application linéaire). En revanche, les notions de matrices semblables et de matrices équivalentes sont hors programme.

a) Opérations sur les matrices

Espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes sur $\mathbf{K}$. Base canonique $(E_{i,j})$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$; dimension de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Isomorphisme canonique de $\mathcal{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Définition du produit matriciel, bilinéarité.

Identification des matrices colonnes et des vecteurs de $\mathbf{K}^n$, des matrices lignes et des formes linéaires sur $\mathbf{K}^p$.
Écriture matricielle $Y = M\,X$ de l'effet d'une application linéaire sur un vecteur.

Algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ des matrices carrées à n lignes. L'isomorphisme canonique de $\mathcal{L}(\mathbf{K}^n)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ conserve le produit. Matrices carrées inversibles ; définition du groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$.

Sous-algèbre des matrices diagonales, des matrices triangulaires supérieures (ou inférieures).

Transposée d'une matrice. Compatibilité avec les opérations algébriques sur les matrices.

Matrices carrées symétriques, antisymétriques.

Les matrices symétriques et les matrices antisymétriques constituent des sous-espaces supplémentaires.

b) Matrices et applications linéaires

Matrice $M_{B,C}(u)$ associée à une application linéaire u d'un espace vectoriel E muni d'une base B dans un espace vectoriel F muni d'une base C. L'application $u \mapsto M_{B,C}(u)$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E,F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$; dimension de $\mathcal{L}(E,F)$.
Matrice $M_B(u)$ associée à un endomorphisme u d'un espace vectoriel E muni d'une base B. L'application $u \mapsto M_B(u)$ est un isomorphisme d'algèbres.
Matrice dans une base d'une famille finie de vecteurs.

La j-ième colonne de $M_{B,C}(u)$ est constituée des coordonnées dans la base C de l'image par u du j-ième vecteur de la base B.

Matrice de passage d'une base B à une base B' d'un espace vectoriel E ; effet d'un changement de base(s) sur les coordonnées d'un vecteur, sur l'expression d'une forme linéaire, sur la matrice d'une application linéaire, sur la matrice d'un endomorphisme.

La matrice de passage de la base B à la base B' est, par définition, la matrice de la famille B' dans la base B : sa j-ième colonne est constituée des coordonnées dans la base B du j-ième vecteur de la base B'. Cette matrice est aussi $M_{B',B}(I_E)$.

c) Opérations élémentaires sur les matrices

Opérations (ou manipulations) élémentaires sur les lignes (ou les colonnes) d'une matrice.

Les opérations élémentaires sur les lignes sont les suivantes :
- addition d'un multiple d'une ligne à une autre (codage : $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$) ;
- multiplication d'une ligne par un scalaire non nul (codage : $L_i \leftarrow \alpha L_i$) ;
- échange de deux lignes (codage : $L_i \leftrightarrow L_j$).

d) Rang d'une matrice

Définition du rang d'une matrice (rang de l'application linéaire canoniquement associée, ou encore rang des vecteurs colonnes).

Pour toute application linéaire u de E dans F, le rang de u est égal au rang de $M_{B,C}(u)$, où B est une base de E et C une base de F.

Invariance du rang par transposition.
Emploi des opérations élémentaires pour le calcul du rang d'une matrice.

La démonstration de ce résultat est hors programme.

e) Systèmes d'équations linéaires

Définition, système homogène associé ; interprétations. Description de l'ensemble des solutions.
Rang d'un système linéaire. Dimension de l'espace vectoriel des solutions d'un système linéaire homogène.

Les étudiants doivent connaître l'interprétation d'un système de n équations linéaires à p inconnues à l'aide des vecteurs de $\mathbf{K}^n$ et d'une application linéaire de $\mathbf{K}^p$ dans $\mathbf{K}^n$ (ainsi que la traduction matricielle correspondante).

Existence et unicité de la solution lorsque $r = n = p$ (systèmes de Cramer). Résolution des systèmes de Cramer triangulaires. Emploi de la méthode du pivot de Gauss pour la résolution des systèmes de Cramer et pour l'inversion des matrices carrées.

Le théorème de Rouché-Fontené et les matrices bordantes sont hors programme.

f) Déterminants d'ordres 2 et 3

Déterminant de deux vecteurs dans une base d'un espace vectoriel de dimension 2, de trois vecteurs dans une base d'un espace vectoriel de dimension 3. Caractérisation des bases.
Application à l'expression de la solution d'un système de Cramer à deux ou trois inconnues.

Dans le plan, équation d'une droite

$$\mathrm{Det}_B(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}) = 0.$$

Extension à l'espace.

Déterminant d'un endomorphisme, du composé de deux endomorphismes ; caractérisation des automorphismes.

Lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, application à l'orientation du plan, de l'espace ; la donnée d'une base détermine une orientation. Bases directes du plan ou de l'espace orienté.

Déterminant d'une matrice carrée. Déterminant du produit de deux matrices.

3- Géométrie affine du plan et de l'espace

a) Repères cartésiens

Repères cartésiens, repère cartésien canonique de $\mathbf{R}^2$, de $\mathbf{R}^3$; coordonnées d'un point.
Changement d'origine, changement de repère.

Un repère cartésien est un couple formé d'un point et d'une base.

Équations cartésiennes d'une droite du plan, d'un plan de l'espace. Définition d'une droite de l'espace par deux équations.

Définition d'un paramétrage d'une droite, d'une demi-droite, d'un plan, d'un demi-plan. Vecteurs directeurs.

La donnée d'un repère cartésien détermine un paramétrage.

b) Barycentres

Définition des barycentres, associativité.
Définition d'un segment ; paramétrage d'un segment.

Travaux pratiques

Exemples d'étude de l'indépendance linéaire d'une famille finie de vecteurs.
Exemples de construction de bases et de sous-espaces vectoriels supplémentaires, et d'emploi de bases, de supplémentaires et de changements de base, notamment pour l'étude des équations linéaires.

Il convient d'exploiter les espaces vectoriels $\mathbf{K}^n$ et $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, ainsi que les espaces vectoriels de polynômes, de suites et de fonctions (calcul de la puissance n-ième d'une matrice, interpolation, de suites récurrentes linéaires, d'équations différentielles. . .).

Exemples d'étude de systèmes d'équations linéaires (résolution des systèmes de Cramer, détermination du rang, recherche d'une base de l'espace vectoriel des solutions d'un système linéaire homogène, existence et calcul d'une solution particulière lorsque $r = n$ ou $r = p$).

Lorsque $p \leqslant 3$, en liaison avec l'étude de l'incidence des droites du plan et des plans de l'espace, les étudiants doivent savoir expliciter l'ensemble des solutions quel que soit le rang.

§ Emploi des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice à coefficients numériques pour la résolution des systèmes de Cramer par l'algorithme du pivot partiel, le calcul de déterminants, l'inversion des matrices carrées, la détermination du rang d'une matrice.

III. ESPACES VECTORIELS EUCLIDIENS ET GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

L'objectif est double :
- Acquérir les notions de base sur les espaces vectoriels euclidiens de dimension 2 ou 3 (produit scalaire, bases orthonormales, supplémentaires orthogonaux, projecteurs orthogonaux, automorphismes orthogonaux, matrices orthogonales) et sur la géométrie euclidienne du plan et de l'espace (distances, angles, réflexions, rotations).
- Maîtriser les relations entre le point de vue géométrique (vecteurs et automorphismes orthogonaux) et le point de vue matriciel.

En ce qui concerne le produit scalaire, il convient d'abord de consolider les acquis des classes de Première et de Terminale et de s'appuyer sur cet exemple fondamental pour introduire cette notion sur un **R***-espace vectoriel de dimension 2 ou 3. En classe TPC première année, les seules connaissances exigibles des étudiants portent sur les vecteurs du plan et de l'espace.*

La mesure de l'angle orienté de deux vecteurs unitaires de $\mathbf{R}^2$ *est définie à* 2π *près, par l'application* $\theta \mapsto \mathrm{e}^{\subset\theta}$ *de* **R** *sur* **U***. Toute définition géométrique des angles est hors programme.*

Dans toute cette partie, le corps de base est **R***.*

1- Produit scalaire, automorphismes orthogonaux

a) Produit scalaire en dimension 2 ou 3

Produit scalaire $(x, y) \mapsto (x|y)$ (noté aussi en géométrie $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \mapsto \overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y}$) sur un **R**-espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à 3 ; définition d'un espace vectoriel euclidien. Inégalité de Cauchy-Schwarz ; norme euclidienne, distance associée, inégalité triangulaire.

L'étude de ces notions doit être illustrée par les exemples suivants :
- le produit scalaire canonique de $\mathbf{R}^2$ et de $\mathbf{R}^3$;
- le produit scalaire des vecteurs du plan et de l'espace.

Vecteurs unitaires. Vecteurs orthogonaux, sous-espaces vectoriels orthogonaux. Bases orthogonales, bases orthonormales ; relation de Pythagore. Orthogonal d'une droite, d'un plan.

Expressions dans une base orthonormale des coordonnées et de la norme d'un vecteur, du produit scalaire de deux vecteurs, de la distance de deux points.

Projecteurs orthogonaux, réflexions.

Expression de la projection orthogonale d'un vecteur sur un sous-espace muni d'une base orthonormale.

Dans le plan (resp. l'espace) euclidien orienté, la donnée d'une orientation d'une droite D induit une orientation de la droite orthogonale (resp. du plan orthogonal).

b) Automorphismes orthogonaux du plan

Définition d'un automorphisme orthogonal d'un plan euclidien E (c'est-à-dire un automorphisme de E conservant le produit scalaire). Caractérisation à l'aide de la conservation de la norme.

Caractérisation d'un automorphisme orthogonal par l'image d'une (de toute) base orthonormale.

Définition du groupe orthogonal $O(E)$; symétries orthogonales, réflexions.

L'étude générale du groupe orthogonal est hors programme.

Définition des matrices orthogonales et du groupe $O(2)$. Caractérisation des matrices orthogonales par leurs vecteurs colonnes.
Caractérisation d'un automorphisme orthogonal à l'aide de la matrice associée dans une (toute) base orthonormale.
Changement de base orthonormale.

Les matrices orthogonales sont définies à partir de l'automorphisme de $\mathbf{R}^2$ associé. Caractérisation des matrices orthogonales par l'une des relations

$$^tM\,M = I_2 \quad \text{ou} \quad M\,{}^tM = I_2.$$

Déterminant d'une matrice orthogonale, d'un automorphisme orthogonal ; déterminant d'une réflexion.
Définition du groupe des rotations $SO(E)$, du groupe $SO(2)$ des matrices de rotation.

Caractérisation d'une rotation par l'image d'une (de toute) base orthonormale directe.

Dans un plan euclidien orienté, déterminant de deux vecteurs dans une base orthonormale directe, noté $\mathrm{Det}\,(a, b)$.

Les étudiants doivent connaître l'interprétation de $|\mathrm{Det}\,(a, b)|$ en termes d'aire.

Dans un plan euclidien orienté, mesure θ (définie modulo 2π) de l'angle orienté de deux vecteurs a et b non nuls.

Relations

$(a|b) = \|a\|\,\|b\|\,\cos\theta$, $\mathrm{Det}\,(a, b) = \|a\|\,\|b\|\,\sin\theta$.

Matrice dans une base orthonormale directe d'une rotation, mesure de l'angle d'une rotation ; matrice de rotation $R(\theta)$ associée à un nombre réel θ ; relation $R(\theta+\theta') = R(\theta)\,R(\theta')$.

Si u est la rotation d'angle de mesure θ, alors pour tout vecteur unitaire a,

$$\cos\theta = \big(a|u(a)\big), \quad \sin\theta = \mathrm{Det}\,\big(a, u(a)\big).$$

c) Réflexions et rotations de l'espace

Réflexions, rotations.

Dans un espace euclidien orienté de dimension 3, déterminant de trois vecteurs dans une base orthonormale directe, noté $\mathrm{Det}\,(a, b, c)$.
Produit vectoriel, notations $u \wedge v$ ou $u \times v$. Expression des coordonnées du produit vectoriel dans une base orthonormale directe.

Les étudiants doivent connaître l'interprétation géométrique de $|\mathrm{Det}\,(a, b, c)|$ en termes de volume.

Dans l'espace vectoriel euclidien de dimension 3, mesure θ (où $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$) de l'angle de deux vecteurs a et b non nuls.

Relations

$(a|b) = \|a\|\,\|b\|\,\cos\theta$, $\|a \wedge b\| = \|a\|\,\|b\|\,\sin\theta$.

Axe et mesure de l'angle d'une rotation d'un espace euclidien orienté de dimension 3. Étant donnée une rotation u d'axe dirigé par un vecteur unitaire a et d'angle de mesure θ (modulo 2π), l'image d'un vecteur x orthogonal à l'axe est donnée par

$$u(x) = (\cos\theta)\,x + (\sin\theta)\,a \wedge x.$$

Les étudiants doivent savoir déterminer l'axe et la mesure de l'angle d'une rotation, ainsi que l'image d'un vecteur quelconque et la matrice associée à cette rotation.

2- Géométrie euclidienne du plan et de l'espace

a) Distances, angles

Repères orthonormaux.
Dans le plan et dans l'espace, droites et plans orthogonaux.
Distance d'un point à une droite du plan, à une droite ou un plan de l'espace.
Dans le plan euclidien orienté, mesure de l'angle orienté de deux droites.
Dans l'espace euclidien de dimension 3, mesure de l'angle de deux droites, de deux plans, d'une droite et d'un plan.

Les étudiants doivent savoir calculer les projections orthogonales, les distances, et les mesures des angles indiqués ci-contre, et savoir les exprimer dans un repère orthonormal.

Dans le plan, équation d'une droite $(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{AM}) = 0$, où $\overrightarrow{u}$ est un vecteur unitaire. Extension à l'espace.

Équations normales d'une droite dans le plan, d'un plan dans l'espace.

b) Réflexions et rotations du plan et de l'espace

Translations, réflexions, rotations.

L'étude des isométries et des déplacements du plan (resp. de l'espace) est hors programme.

c) Cercles et sphères

Dans le plan, intersection d'un cercle et d'une droite.
Dans l'espace, intersection d'une sphère et d'un plan.
Équations cartésiennes d'un cercle, d'une sphère.

Caractérisation d'un cercle et d'une sphère par l'équation $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ où AB est un diamètre.

d) Coniques

Dans le plan, définition par excentricité, foyer et directrice d'une parabole, d'une ellipse, d'une hyperbole. Équations réduites, centres, sommets, foyers. Asymptotes d'une hyperbole.

Définition d'une conique par une équation cartésienne (dans un repère orthonormal) de la forme

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + 2\gamma x + 2\delta y + \varepsilon = 0.$$

Équation réduite.

En dehors du cas indiqué ci-contre et de celui des hyperboles définies par une relation $xy = \lambda$, aucune connaissance spécifique sur la réduction des coniques définies par une équation cartésienne n'est exigible des étudiants.

Travaux pratiques

§ En dimensions 2 ou 3, exemples d'emploi de bases orthonormales, de supplémentaires orthogonaux et de changements de base orthonormale.

§ En dimensions 2 et 3, exemples d'emploi du produit scalaire, du produit vectoriel et du produit mixte pour l'étude de configurations du plan et de l'espace (calcul de projections orthogonales, de distances, de mesures d'angles, d'aires, de volumes...).